TRẦN THỊ VÂN ANH

MỚI

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN ĐẠI SỐ 8

- ✓ Kiến thức trọng tâm và phương pháp giải.
- ✓ Nâng cao kĩ năng tính toán.
- ✓ Các dạng bài tập từ cơ bản đến nâng cao.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN THỊ VÂN ANH

MỚI

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN ĐẠI SỐ 8

- ✓ Kiến thức trọng tâm và phương pháp giải.
- ✓ Nâng cao kĩ năng tính toán.
- ✓ Các dạng bài tập từ cơ bản đến nâng cao.

ĐHQG HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
BÍCH HẠNH
Sửa bài
ANH THƯ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN ĐẠI SỐ 8
Mã số: 1L-263ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Song Nguyên
Số xuất bản: 238 - 2010/CXB/22 - 45/ĐHQGHN, ngày 12/3/2010
Quyết định xuất bản số: 263LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Đ(đáp ứng nhu cầu học tập của học sinh, tài liệu tham khảo cho giáo viên, tc giả đã mạnh dạn viết quyển sách:

Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán Đại số 8.

Trong quyển sách này, tác giả đã phân chia thành 10 chủ đề cơ bản sau, bao gồm:

1. Chia đa thức

2. Phân tích đa thức thành nhân tử

3. Phân thức hữu tỉ

4. Phương trình dạng $ax + b = 0$.

5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

6. Bất phương trình bậc nhất .

7. Các bài toán về số học

8. Bất đẳng thức

9. Các bài toán tổng hợp

10. Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

Tong mỗi phần, sách được cấu trúc gồm 4 nội dung chính như sau:

1 Kiến thức cơ bản. ***2. Các ví dụ minh họa .***

3 Bài tập vận dụng ***4. Hướng dẫn và đáp số.***

Vc mỗi dạng bài tập cơ bản đều có phương pháp giải cụ thể và ví dụ minh ọa. Ngoài ra, các bài tập đều có hướng dẫn giải chi tiết, dễ hiểu. Nhiều ví dụ có lời nhận xét để giúp học sinh tránh các sai lầm cơ bản. Các bài tậ được lựa chọn từ dễ đến khó, có những bài tác giả đã đưa ra nhiều phươn pháp khác nhau để bạn đọc tham khảo. Ngoài ra tác giả đã đưa thêm phần: ***Các bài toán tổng hợp và một số đề thi học sinh giỏi của các tỉnh, thành phố trên toàn quốc***, để bạn đọc tham khảo thêm. Mặc dù đã hết sức cố gắng, song lời giải các bài toán trong quyển sách này có khi chưa phải là phươn án giải hay nhất và cũng có thể còn thiếu sót. Tuy vậy, tác giả hy vọng ng quyển sách này sẽ giúp ích cho các bạn trong quá trình học tập và giảng ay, đặc biệt là quá trình tự học.

Chc các em học sinh và các thầy cô giáo quan tâm đến quyển sách này thành ông trên mọi lĩnh vực. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các em học sinh và các thầy cô giáo, tác giả xin chân thành cảm ơn trước.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

-**Trung tâm Sách giáo dục Anpha**

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

-**Công ti Sách - thiết bị giáo dục Anpha**

50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, Tp. HCM.

ĐT: 08. 62676463, 38547464 .

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin chân thành cám ơn!

Tác giả

MỤC LỤC

§1. Chia đa thức 3

§2. Phân tích đa thức thành nhân tử 14

§3. Phân thức hữu tỉ 48

§4. Phương trình dạng ax + b = 0 74

§5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình 101

§6. Bất phương trình bậc nhất 121

§7. Các bài toán về số học 135

§8. Bất đẳng thức 173

§9. Các bài toán tổng hợp 217

§ 10. Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên.. 219

§1. CHIA ĐA THỨC

Một số kiến thức cơ bản

1. *Đa thức là một tổng đại số nhiều đơn thức. Giá trị của đa thức P(x) với* $x = a$ *được ký hiệu là P(a). Hai đa thức có cùng số trị với mọi giá trị của các chữ trong đa thức gọi là hai đa thức đồng nhất. Hai đa thức cùng bậc của x đồng nhất khi và chỉ khi hệ số các hạng tử đồng dạng bằng nhau. Một đa thức đồng nhất bằng 0 khi và chỉ khi tất cả các hệ số bằng 0.*
2. *Đa thức A(x) gọi là chia hết cho đa thức B(x) nếu tồn tại đa thức Q(x) sao cho* $A(x) = B(x).Q(x)$. *Với mọi cặp đa thức A(x) và B(x), tồn tại cặp đa thức Q(x) và R(x) sao cho* $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$ *trong đó bậc của R(x) nhỏ hơn bậc của B(x). Khi đó Q(x) là thương và R(x) là dư của phép chia A(x) cho B(x).*

   Ta cũng nhắc lại ở đây rằng nếu hai đa thức gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng giá trị với mọi giá trị của biến. Do đó nếu hai đa thức (được viết dưới dạng thu gọn) có các hệ số tương ứng của các đơn thức đồng dạng chứa trong hai đa thức đó bằng nhau thì hai đa thức đó bằng nhau.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Xác định hệ số a để đa thức $(x^3 - 3x + a)$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Giải

Cách 1: Thực hiện phép chia: Ta có:

$$(x^3 - 3x + a) = (x^2 - 2x + 1).(x + 2) + (a - 2)$$

Muốn phép chia không còn dư, ta phải có $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy để đa thức $(x^3 - 3x + a)$ chia hết cho $(x-1)^2$ thì $a = 2$.

Cách 2: Phương pháp hệ số bất định

Giả sử đa thức bậc ba $x^3 - 3x + a$ chia hết cho đa thức bậc hai $x^2 - 2x + 1$, ta được thương là nhị thức bậc nhất, có số hạng bậc cao nhất là $x^3 : x^2 = x$, số hạng bậc thấp nhất là $a : 1 = a$.

Như vậy $x^3 - 3x + a$ đồng nhất với $(x^2 - 2x + 1)(x + a)$, tức là $x^3 - 3x + a$ đồng nhất với: $x^3 + (a-2)x^2 + (1-2a)x + a$.

Do đó hệ số các số hạng đồng dạng phải bằng nhau, tức là:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ 1 - 2a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Cách 3: Phương pháp trị số riêng

Gọi thương của phép chia là Q(x) ta có $x^3-3x+a=(x-1)^2.Q(x)$ với mọi x. Với $x=1$ thì $1^3-3.1+a=0.Q(x)$ hay $-2+a=0 \Leftrightarrow a=2$.

Vậy, với $a=2$ thì x^3-3x+a chia hết cho $(x-1)^2$.

Ví dụ 2: Xác định các hằng số a và b sao cho:

a. x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1.

b. $ax^3+bx^2+5x-50$ chia hết cho $x^2+3x-10$.

Giải

a. ***Cách 1:*** Đặt tính chia ta được thương bằng x^2+x+a, dư $(a-1)x+(b-a)$.

Muốn chia hết thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, do đó $a=1$, $b=a$. Vậy $a=b=1$.

Cách 2: Thương có dạng x^2+cx+b. Nhân nó với x^2-x+1 rồi đồng nhất với x^4+ax^2+b, ta được $c-1=0$, $b-c+1=a$, $c-b=0$. Suy ra $a=b=c=1$.

b. ***Cách 1:*** Đặt tính chia.

Cách 2: Đồng nhất $(x^2+3x-10)(ax+5)$ với đa thức bị chia, được $3a+5=b$, $15-10a=5$. Suy ra $a=1$, $b=8$.

Cách 3: Xét $ax^3+bx^2+5x-50=(x+5)(x-2).Q(x)$. Lần lượt cho $x=-5$, $x=2$, ta được: $\begin{cases}-125a+25b=75\\8a+4b=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5a+b=3\\2a+b=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=8\end{cases}$

Ví dụ 3: Tìm các hằng số a và b sao cho x^3+ax+b chia cho $x+1$ thì dư 7, chia cho $x-3$ thì dư -5.

Giải

$x^3+ax+b=(x+1).P(x)+7$ nên với $x=-1$ thì $-1-a+b=7$, tức là:

$a-b=-8$ (1)

$x^3+ax+b=(x-3).Q(x)-5$ nên với $x=3$ thì $27+3a+b=-5$ tức là:

$3a+b=-32$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=-10$, $b=-2$.

Ví dụ 4: Tìm các hằng số a, b, c sao cho ax^3+bx^2+c chia hết cho $x+2$, chia cho x^2-1 thì dư $x+5$.

Giải

Trong hằng đẳng thức $ax^3+bx^2+c=(x+2).P(x)$, cho $x=-2$, ta được $-8a+4b+c=0$ (1)

Trong hằng đẳng thức $ax^3+bx^2+c=(x+1)(x-1).Q(x)+x+5$, lần lượt cho $x=1$ và $x=-1$, được $a+b+c=6$, $-a+b+c=4$ (2)

Từ (1) & (2) suy ra a = 1, b = 1, c = 4.

Ví dụ 5: Đa thức P(x) chia cho $(x-1)$ được số dư bằng 4, chia cho $(x-3)$ được số dư bằng 14. Tìm số dư của phép chia P(x) chia $(x-1)(x-3)$.

Giải

Cách 1: Gọi thương của phép chia đa thức P(x) cho (x – 1) và cho (x – 3), theo thứ tự là A(x), B(x) và dư theo thứ tự là 4 và 14. Như vậy:

$P(x)=(x-1).A(x)+4$ với mọi x (1)

$P(x)=(x-3).B(x)+14$ với mọi x (2)

Gọi thương của phép chia P(x) cho đa thức bậc hai $(x-1)(x-3)$ là C(x) và dư là R(x). Vì bậc của R(x) nhỏ hơn bậc 2 nên R(x) có dạng $ax+b$.

Ta có: $P(x)=(x-1)(x-3).C(x)+(ax+b)$ với mọi x. (3)

Thay $x=1$ vào (1) và (3) ta có: $P(1)=4$; $P(1)=a+b$.

Thay $x=3$ vào (2) và (3) ta có: $P(3)=14$; $P(3)=3a+b$.

Từ $\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \end{cases}$

Vậy, dư của phép chia P(x) cho $(x-1)(x-3)$ là $5x-1$.

Cách 2: $P(x)=(x-1).A(x)+4$ nên

$(x-3)P(x)=(x-1)(x-3).A(x)+4(x-3)$ (1)

$P(x)=(x-3).B(x)+14$ nên:

$(x-1)P(x)=(x-1)(x-3).B(x)+14(x-1)$ (2)

Lấy (2) trừ (1) vế theo vế, ta có:

$[(x-1)-(x-3)]P(x)=(x-1)(x-3).[B(x)-A(x)+14(x-1)-4(x-3)]$

$\Leftrightarrow 2P(x)=(x-1)(x-3)[B(x)-A(x)]+10x-2$

Do đó: $P(x)=(x-1)(x-3)\dfrac{B(x)-A(x)}{2}+(5x-1)$ trong đó bậc của $5x-1$ nhỏ hơn bậc của $(x-1)(x-3)$.

Vậy dư của phép chia P(x) cho $(x-1)(x-3)$ là $5x-1$.

Ví dụ 6: Chia các đa thức

a. $(3x^4-8x^3-10x^2+8x-5):(3x^2-2x+1)$

b. $(2x^3-9x^2+19x-15):(x^2-3x+5)$

c. $(6x^5-3x^4y+2x^3y^2+4x^2y^3-5xy^4+2y^5):(3x^3-2xy^2+y^3)$

Giải

a. ***Cách 1:*** Chia thông thường

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4-8x^3-10x^2+8x-5 & 3x^2-2x+1 \\
\underline{3x^4-2x^3+x^2} & \overline{x^2-2x-5} \\
\quad -6x^3-11x^2+8x-5 & \\
\quad \underline{-6x^3+4x^2-2x} & \\
\qquad -15x^2+10x-5 & \\
\qquad \underline{-15x^2+10x-5} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Cách 2: Dùng phương pháp hệ số bất định:

– Ta nhận thấy rằng, hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của đa thức bị chia và của đa thức chia là bằng nhau (bằng 3). Vậy hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của thương phải là 1. Tương tự như vậy, hạng tử không đổi của thương phải là $-5(-5.1)=-5$. Mặt khác, đa thức bị chia có bậc là 4, đa thức chia có bậc là 2. Vậy đa thức thương có bậc là 2. Do vậy đa thức thương phải có dạng : x^2+ax-5

Ta có: $3x^4-8x^3-10x^2+8x-5=(3x^2-2x+1)(x^2+ax-5)$

Khai triển vế phải bằng phép nhân các đa thức, ta có:

$3x^4-8x^3-10x^2+8x-5$

$=3x^4+(3a-2)x^3+(-15-2a+1)x^2+(a+10)x-5$. Hệ số của các hạng tử cùng bậc ở hai vế phải bằng nhau, ta suy ra: $\begin{cases} 3a-2=-8 \\ -15-2a+1=-10 \\ a+10=8 \end{cases}$

Cả ba đẳng thức đều cho $a=-2$. Vậy đa thức thương là x^2-2x-5

b. ***Cách 1:*** Cách thông thường (các bạn tự giải)

Cách 2: Sử dụng phương pháp đồng nhất các hệ số (phương pháp hệ số bất định). Ta thấy ngay thương phải là một nhị thức bậc nhất mà hệ số của x là 2, hạng tử không đổi là –3.

Đó là $2x-3$. Kiểm tra lại, ta thấy đúng là:

$(2x^3-9x^2+19x-15)\equiv(x^2-3x+5)(2x-3)$

c. ***Cách 1:*** Ta nhận thấy: Đa thức bị chia bậc 5, đa thức chia bậc 3. Vậy đa thức thương phải là bậc 2.

– Hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của x trong đa thức bị chia là 6, trong đa thức chia là 3. Vậy hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của x trong thương là 2.

Tương tự, hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của y trong thương là 2.

Vậy thương phải có dạng: $2x^2 + axy + 2y^2$. Ta có:

$$(6x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5)$$
$$= (3x^3 - 2xy^2 + y^3)(2x^2 + axy + 2y^2)$$

Đồng nhất các hệ số của các hạng tử cùng bậc ở hai vế sau khi khai triển, ta có: $a = -1$. Vậy thương là $2x^2 - xy + 2y^2$.

Cách 2: Chia thông thường

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5 & 3x^3 - 2xy^2 + y^3 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5 \qquad\quad - 4x^3y^2 + 2x^2y^3} & 2x^2 - xy + 2y^2 \\
\quad -3x^4y + 6x^3y^2 + 2x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5 & \\
\quad \underline{-3x^4y \qquad\qquad + 2x^2y^3 \quad - xy^4} & \\
\qquad\qquad 6x^3y^2 \qquad\qquad - 4xy^4 + 2y^5 & \\
\qquad\qquad \underline{6x^3y^2 \qquad\qquad - 4xy^4 + 2y^5} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Chú ý:

– Phương pháp hệ số bất định chỉ nên sử dụng trong phép chia khi biết chắc thương là một nhị thức bậc nhất hoặc là tam thức bậc hai mà ta đã biết một vài hệ số, chỉ cần xác định một, hai hệ số nữa; chỉ trong trường hợp này thì việc làm mới đơn giản và có lợi.

Phương pháp phân tích thành nhân tử cũng chỉ nên dùng khi việc phân tích là tương đối đơn giản.

Ví dụ 7. Chứng minh định lí "Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức $(x - a)$ bằng giá trị của đa thức ấy tại $x = a$".

Giải

Chia đa thức f(x) cho nhị thức $(x - a)$, ta được thương là $Q(x)$ và dư là hằng số r. Ta có $f(x) = (x - a).Q(x) + r$ với mọi x, do đó $x = a$ thì $f(a) = r$.

Chú ý: Định lí trên được gọi là định lí Bê–du mang tên nhà toán học Pháp Bézout (1730 – 1783). Định lí Bê–du giúp ta tính số dư của phép chia đa thức f(x) cho nhị thức $(x - a)$ mà không cần thực hiện phép chia đa thức.

Từ định lí Bê–du, ta thấy đa thức f(x) chia hết cho $(x - a)$ khi và chỉ khi a là nghiệm của đa thức.

Ví dụ 8. Cho đa thức $f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. Chứng minh rằng:

a) Đa thức f(x) chia hết cho $(x - 1)$ nếu tổng các hệ số bằng 0.

b) Đa thức f(x) chia hết cho $(x + 1)$ nếu tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ.

Giải

a) Theo định lí Bê–du, số dư r của phép chia f(x) cho $(x - 1)$ là:

$$r = f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Nếu $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ thì $r = 0$.

b) Theo định lí Bê–du, số dư r của phép chia f(x) cho $(x + 1)$ là:

$$r = f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$

Nếu $a_0 + a_2 + a_4 = a_1 + a_3$ thì $r = 0$.

Chú ý: Chứng minh trên không chỉ đúng đối với đa thức f(x) có bậc bốn mà còn đúng với đa thức f(x) có bậc bất kì.

Ví dụ 9. Tìm các giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức $2n^2 + 3n + 3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n - 1$.

Giải: Đặt phép chia:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2n^2 - 3n + 3 & 2n - 1 \\ \cline{3-3}
- & 2n^2 - n & n + 2 \\ \hline
 & 4n + 3 & \\
- & 4n - 2 & \\ \hline
 & 5 &
\end{array}$$

Đa thức $2n^2 + 3n + 3$ không chia hết cho đa thức $2n - 1$, nhưng có những giá trị nguyên của n để giá trị của $2n^2 + 3n + 3$ chia hết cho giá trị của $2n - 1$.

Muốn vậy $2n - 1$ phải là ước của 5, tức là ± 1; ± 5.

Với $2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1$

Với $2n - 1 = -1 \Rightarrow n = 0$

Với $2n - 1 = 5 \Rightarrow n = 3$

Với $2n - 1 = -5 \Rightarrow n = -2$

Vậy với n bằng 1; 0; 3; -2 thì giá trị của biểu thức $2n^2 + 3n + 3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n - 1$.

Bài tập vận dụng

1. Rú gọn các biểu thức:

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^{45}:\left(\frac{9}{16}\right)^{10}$; 2. $\frac{125^{100}.2^{160}}{5^{298}.4^{80}}$;

3. $\frac{9^{8}.5^{3}}{\cdot^{8}.27^{3}.5^{4}}$; 4. $\left(15.3^{11}+4.27^{4}\right):9^{7}$; 5. $\frac{8(x+2y)^{5}}{2x+4y}$.

2. Xá định hệ số a để đa thức (x^4+ax^2+1) chia hết cho (x^2+2x+1).

3. Xá định hệ số a để phép chia $\left(3x^2+ax+27\right)$ chia cho $\left(x+5\right)$ có số dư bằng 2.

4. Tìn hệ số a và b để đa thức $\left(x^4+ax^2+b\right)$ chia hết cho $\left(x^2+x+1\right)$.

5. Tìn hệ số a và b sao cho $\left(ax^3+bx-24\right)$ chia hết cho $\left(x+1\right)\left(x+3\right)$.

6. Tìn hệ số a và b sao cho $(x^4-x^3-3x^2+ax+b)$ chia cho (x^2-x-2) đưc dư là $\left(2x-3\right)$.

7. Đa thức $(2x^3+ax+b)$ chia cho $\left(x+1\right)$ dư –6, đa thức ấy chia cho $\left(x-2\right)$ dư 21. Xác định các hệ số a và b.

8. Chưng minh rằng không tồn tại số tự nhiên nào để giá trị của biểu thức $2n-3n^2+n+3$ chia hết cho giá trị của biểu thức n^2-n.

9. Không làm phép chia đa thức, hãy xác định xem đa thức $4x^3-7x^2-x-2$ có hia hết cho các đa thức sau hay không:

a) $:-2$; b) $x+2$.

10. Ch đa thức $P\left(x\right)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Chứng minh:

a) I(x) chia hết cho $\left(x-1\right)$ nếu tổng các hệ số bằng 0.

b) '(x) chia hết cho $\left(x+1\right)$ nếu tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ đối vớix bằng tổng các hệ số của lũy thừa bậc chẵn đối với x.

11. Xá định dư của phép chia đa thức $(x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81})$ cho:

a) $:-1$; b) x^2-1.

12. Chưng minh rằng $(x^2+x-1)^{10}+(x^2-x+1)^{10}-2$ chia hết cho $\left(x-1\right)$.

13. Tìm các giá trị nguyên của x để số trị biểu thức $\left(2x^2+x-7\right)$ chia hết cho số trị biểu thức $\left(x-2\right)$.

14. Tìm các giá trị nguyên của x để số trị biểu thức $(10x^2-7x-5)$ chia hết cho số trị biểu thức $\left(2x-3\right)$.

15. Xác định số tự nhiên n để số trị biểu thức $(25n^2-97n+11)$ chia hết cho số trị biểu thức $\left(n-4\right)$.

16. Tìm đa thức P(x) biết rằng P(x) chia cho $\left(x+3\right)$ thì dư 1, chia cho $\left(x-4\right)$ thì dư 8, chia cho $\left(x+3\right)\left(x-4\right)$ được thương là 3x và còn dư.

17. Xác định hằng số a sao cho:

a. $4x^2-6x+a$ chia hết cho $x-3$.

b. $2x^2+x+a$ chia hết cho $x+3$.

c. x^3+ax^2-4 chia hết cho x^2+4x+4.

18. Xác định hằng số a sao cho:

a. $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$.

b. $2x^2+ax+1$ chia cho $x-3$ dư 4.

c. ax^5+5x^4-9 chia hết cho $x-1$.

19. Xác định các hằng số a và b sao cho

a. x^4+ax+b chia hết cho x^2-4.

b. x^4+ax^3+bx-1 chia hết cho x^2-1.

c. x^3+ax+b chia hết cho x^2+2x-2.

20. Xác định các hằng số a và b sao cho

a. ax^4+bx^3+1 chia hết cho $(x-1)^2$.

b. x^4+4 chia hết cho x^2+ax+b.

21. Rút gọn các biểu thức:

a) $49^{12}:7^4$; b) $\left(\frac{25}{16}\right)^{25}:\left(\frac{5}{4}\right)^{50}$; c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{25}:\left(\frac{9}{16}\right)^{10}$.

22. Xác định các số a sao cho:

a) $27x^2+a$ chia hết cho $3x+2$;

b) x^4+ax^2+1 chia hết cho x^2+2x+1;

Hướng dẫn và đáp số

1. 1. Đổi thành lũy thừa cùng cơ số: $\left(\frac{3}{4}\right)^{45}:\left(\frac{3}{4}\right)^{20}=\left(\frac{3}{4}\right)^{25}$.

2. Đổi thành lũy thừa cùng cơ số: $\frac{125^{100}.2^{160}}{5^{298}.4^{80}}=\frac{5^{300}.2^{160}}{5^{298}.2^{160}}=5^2=25$.

3. Đáp số: $\frac{1}{15}$.

4. Đáp số: 1.

5. $\frac{8(x+2y)^5}{2x+4y}=\frac{8(x+2y)^5}{2(x+2y)}=4\left(x+2y\right)^4$.

2. Đáp số: $a=-2$.

3. Gọi thương của phép chia là Q(x) thì $(3x^2+ax+27)=(x+5).Q(x)+2$ với mọi x. Sau đó cho $x=-5$, ta được $a=20$.

4. ***Cách 1:*** Làm phép chia, ta được thương bằng x^2-x+a, dư $(1-a)x+(b-a)$.

Muốn chia hết thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, tức là $\begin{cases}1-a=0\\b-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

Cách 2: Nhận xét thương là đa thức bậc hai có số hạng bậc cao nhất là $x^4:x^2=x^2$, số hạng bậc thấp nhất là $b:1=b$. Gọi thương là x^2+cx+b rồi đồng nhất $(x^2+x+1)(x^2+cx+b)$ với (x^4+ax^2+b), ta được $c+1=0;\ b+c+1=a;\ b+c=0\ \Rightarrow\ c=-1;\ b=1;\ a=1$.

5. ***Cách 1:***

Thực hiện phép chia, được thương là $ax-4a$, dư $\left(13a+b\right)x+\left(12a-24\right)$.

Cách 2: Đồng nhất đa thức $(ax^3+bx-24)$ với $(x^2+4x+3)(ax-8)$, suy ra $4a-8=0;\ 3a-32=b$.

Cách 3: Với mọi x, ta có $(ax^3+bx-24)=(x+1)(x+3).Q(x)$, lần lượt cho $x=-1;\ x=-3$. Đáp số: $a=2;\ b=-26$.

6. Đáp số: $a=3;\ b=-1$.

7. Với mọi x, ta có: $(2x^3+ax+b)=(x+1).P(x)-6$ (1)

$(2x^3+ax+b)=(x-2).Q(x)+21$ (2)

Với $x=-1$ thì $-2-a+b=-6$.

Với $x=2$ thì $16+2a+b=21$. Do đó: $a=3;\ b=-1$.

8. Ta phải có (n^2-n) là ước của 3. Điều này không xảy ra vì (n^2-n) là số chẵn.

9. a. $4x^3-7x^2-x-2=(x-2).P(x)+r$ với mọi x.

Với $x=2$ thì $4.2^3-7.2^2-2-2=r \Leftrightarrow r=0$.

Vậy, $4x^3-7x^2-x-2$ chia hết cho $x-2$.

b. Số dư của phép chia bằng – 60.

10. a) $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-1).Q(x)+r$ với mọi x.

Với $x=1$ thì $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=r$.

Nếu $a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=0$ thì $r=0$, tức là P(x) chia hết cho $x-1$.

b. Tương tự như trên, ta có: $-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=r$.

Nếu $a_5+a_3+a_1=a_4+a_2+a_0$ thì $r=0$, tức là P(x) chia hết cho $x+1$.

11. a. Dư trong phép chia cho x – 1 là hằng số.

Gọi thương của phép chia là Q(x) và dư là r, ta có với mọi x:

$(x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81})=(x-1).Q(x)+r$

Với $x=1$ thì $1+1+1+1+1=5 \Leftrightarrow r=5$.

Vậy, số dư của phép chia là 5.

b. Dư trong phép chia cho x^2-1 có bậc cao nhất là bậc nhất.

Gọi thương của phép chia là Q(x) và dư là $ax+b$, với mọi x ta có:

$(x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81})=(x^2-1).Q(x)+(ax+b)$.

Với $x=1$ thì $5=a+b$.

Với $x=-1$ thì $-5=-a+b$.

Từ đó $a=5;\ b=0$. Dư của phép chia là 5x.

12. Đặt $(x^2+x-1)^{10}+(x^2-x+1)^{10}-2=(x-1).Q(x)+r$ với mọi x, rồi cho $x=1$, ta được $r=0$.

13. Đặt phép chia $(2x^2+x-7)$ cho x – 2, ta được thương là $2x+5$, số dư là 3. Như vậy đa thức $(2x^2+x-7)$ không chia hết cho x – 2. Nhưng có những giá trị của x làm cho số trị của $(2x^2+x-7)$ chia hết cho số trị của x – 2. Đó là những giá trị của x mà 3 chia hết cho x – 2. Ước số của 3 là ±1; ±3. Lần lượt cho x – 2 bằng 1; – 1; 3; – 3, ta được $x=3;\ 1;\ 5;\ -1$.

14. Đáp số: 2; 1; – 2; 5.

15. n – 4 phải là ước số của 23. Đáp số: 5; 3; 27; – 19.

16. Dư của phép chia là $x + 4$.

$P(x) = 3x(x + 3)(x - 4) + x + 4 = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$.

17. a. $a = -18$ b. $a = -15$ c. $a = 3$.

18. a. $a = -12$ b. $a = -5$ c. $a = 4$

19. a. Có thể giải bằng 3 cách: đặt tính chia, hệ số bất định, xét giá trị riêng.

Đáp số: $a = 0,\ b = -16$.

b. Có thể giải bằng 3 cách như câu a. Đáp số: $a + b = 0$ (tức là a tùy ý, $b = -a$)

c. Có thể giải bằng hai cách: đặt tính chia, hệ số bất định. Đáp số: $a = -6,\ b = 4$.

20.a. Gải bằng hai cách: Đáp số $a = 3,\ b = -4$.

b. Phân tích $x^4 + 4$ thành nhân tử, được $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

Vậy $a = \pm 2,\ b = 2$.

21. a) Đổi thành lũy thừa cùng cơ số:

Cách 1: $49^{12} : 7^4 = (7^2)^{12} : 7^4 = 7^{24} : 7^4 = 7^{20}$

Cách 2: $49^{12} : 7^4 = 49^{12} : (7^2)^2 = 49^{12} : (49)^2 = 49^{10}$

b) Đáp số: 1.

c) Đáp số: $\left(\frac{3}{4}\right)^5$

22. a) $a = -12$

b) $a = -2$

c) Gọi thương của phép chia là Q(x) thì $3x^2 + ax + 27 = (x + 5).Q(x) + 2$ vớimọi x.

Sau đó cho $x = -5$ ta được $a = 20$.

§2. Phân tích đa thức thành nhân tử

Một số kiến thức cơ bản

Hằng đẳng thức đáng nhớ

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

Phương pháp chung: *Trong phương pháp này, người ta thường tách các hạng tửcủa đa thức thành tích các nhân tử sao cho giữa các hạng tử xuất hiện nhân tử chung*

Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm nhiều hạng tử

Phương pháp chung: *Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng, ta kết hợp những hạng tử của đa thức thành các nhóm thích hợp, rồi áp dụng các phương pháp khác để phân tích thành nhân tử đối với từng nhóm.*

Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức.

Phương pháp chung: *Ta sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ theo chiều biến đổi từ vế này là một đa thức sang vế kia là một tích của các nhân tử, hoặc lũy thừa của một đa thức đơn giản hơn.*

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp thêm bớt và tách các hạng tử

Phương pháp chung: *Trong quá trình phân tích nhân tử, để làm xuất hiện nhân tử chung, chúng ta thường tách các hạng tử, hoặc thêm bớt các hạng tử, sau đó sử dụng các phương pháp ở trên. Khi tách các hạng tử, hoặc thêm bớt các hạng tử ta thường chú ý đến sự xuất hiện nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức đáng nhớ .*

Dạng 5: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

Dạng 6: Sử dụng phân tích thành nhân tử để giải phương trình bậc cao.

Phương pháp chung: *Để giải các phương trình bậc cao, người ta thường phân tích thành nhân tử đưa về phương trình tích .*

Dạng 7: Sử dụng phân tích thành nhân tử để giải các bài toán khác
Dạng 8: Sử dụng định lý Bezout vào phân tích đa thức thành nhân tử.

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

Ví dụ 1: Đưa các nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc:

a. $a^{m+2} - a^m$;   b. $-5x^m y + 15x^n y$.

Giải

a. $a^{m+2} - a^m = a^m.a^2 - a^m = a^m(a^2 - 1) = a^m(a-1)(a+1)$

b. Phân biệt hai trường hợp:

* $m \ge n$: $-5x^m y + 15x^n y = -5x^n.x^{m-n}y + 15x^n y = -5x^n y(x^{m-n} - 3)$

* $m < n$: $-5x^m y + 15x^n y = -5x^m y + 15x^m.x^{n-m}y = -5x^m y(1 - 3x^{n-m})$.

Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm nhiều hạng tử

Phương pháp chung: *Ta sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ theo chiều biến đổi từ vế này là một đa thức sang vế kia là một tích của các nhân tử, hoặc lũy thừa của một đa thức đơn giản hơn.*

Ví dụ 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $x^3z + x^2yz - x^2z^2 - xyz^2$;   b. $p^{m+2}q - p^{m+1}q^3 - p^2q^{n+1} + pq^{n+3}$

Giải

Có nhiều cách giải, tùy theo cách ta nhóm các số hạng

a. ***Cách 1***:

$P = x^3z + x^2yz - x^2z^2 - xyz^2 = (x^3z - x^2z^2) + (x^2yz - xyz^2)$

$= (x - z)(x^2z + xyz) = xz(x-z)(x+y)$

Cách 2: $P = (x^3z + x^2yz) - (x^2z^2 + xyz^2)$

$= x^2z(x+y) - xz^2(x+y) = xz(x+y)(x-z)$

b. ***Cách 1:***

$Q = p^{m+2}.q - p^{m+1}q^3 - p^2q^{n+1} + pq^{n+3} = p^{m+1}q(p - q^2) - pq^{n+1}(p - q^2)$

$= (p - q^2)(p^{m+1}q - pq^{n+1}) = pq(p - q^2)(p^m - q^n)$

Cách 2: $Q = (p^{m+2}q + pq^{n+3}) - (p^{m+1}q^3 + p^2q^{n+1})$

$= pq(p^{m+1} + q^{n+2}) - pq(p^m q^2 + pq^n) = pq\left[(p^{m+1} - q^2p^m) + (q^{n+2} - pq^n)\right]$

$= pq[p^m(p - q^2) + q^n(q^2 - p)] = pq(p - q^2)(p^m - q^n)$.

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a. $x^2-(a+b)xy+aby^2$ b. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

c. $(xy+ab)^2+(ay-bx)^2$; d. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

Giải

a. $x^2-axy-bxy+aby^2=(x^2-axy)-(bxy-aby^2)$

$=x(x-ay)-by(x-ay)=(x-ay)(x-by)$.

b. $(abx^2+xya^2)+(aby^2+xyb^2)=ax(bx+ay)+by(ay+bx)$

$=(bx+ay)(ax+by)$.

c. $x^2y^2+a^2b^2+a^2y^2+b^2x^2=(x^2y^2+a^2y^2)+(a^2b^2+b^2x^2)$

$=y^2(x^2+a^2)+b^2(x^2+a^2)=(x^2+a^2)(y^2+b^2)$

d. $(a^2b-a^2c+b^2c-b^2a)+c^2(a-b)=\left[(a^2b-b^2a)-(a^2c-b^2c)\right]+c^2(a-b)$

$=\left[ab(a-b)-c(a^2-b^2)\right]+c^2(a-b)=(a-b)(ab-ca-cb)+c^2(a-b)$

$=(a-b)(ab-ca-cb+c^2)=(a-b)\left[(ab-cb)+(c^2-ca)\right]$

$=(a-b)(a-c)(b-c)$

Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

Phương pháp chung: *Ta sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ theo chiều biến đổi từ vế này là một đa thức sang vế kia là một tích của các nhân tử, hoặc lũy thừa của một đa thức đơn giản hơn.*

Ví dụ 1: Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:

a. $25x^4-10x^2y+y^2$

b. $-16a^4b^6-24a^5b^5-9a^6b^4$;

c. $8m^3+36m^2n+54mn^2+27n^3$.

Giải

a. $25x^4-10x^2y+y^2=(5x^2)^2-2(5x^2)y+y^2=(5x^2-y)^2$

b. $-16a^4b^6-24a^5b^5-9a^6b^4=-a^4b^4(16b^2+24ab+9a^2)$

$=-a^4b^4\left[(4b)^2+2(4b)(3a)+(3a)^2\right]=-a^4b^4(4b+3a)^2$

c. $8m^3+36m^2n+54mn^2+27n^3$

$=(2m)^3+3.(2m)^2.3n+3.2m(3n)^2+(3n)^3=(2m+3n)^2$

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$; b. $(ax+by)^2-(ay+bx)^2$;

c. $(a^2+b^2-5)^2-4(ab+2)^2$; d. $(4x^2-3x-18)^2-(4x^2+3x)^2$.

Giải

a. $(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$

$= \left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right]$

$= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

b. $(ax + by + ay + bx)(ax + by - ay - bx)$

$= (a+b)(x+y)(a-b)(x-y)$

c. $(a^2 + b^2 - 5 + 2ab + 4)(a^2 + b^2 - 5 - 2ab - 4)$

$= \left[(a+b)^2 - 1\right]\left[(a-b)^2 - 9\right] = (a+b+1)(a+b-1)(a-b+3)(a-b-3)$

d. $(4x - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x)$

$= (8x^2 - 18)(-6x - 18) = \left[2(4x^2 - 9)\right]\left[-6(x+3)\right] = -12(2x+3)(2x-3)(x+3)$

Ví dụ 3 Phân tích thành nhân tử:

$$\left[4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\right]^2 - 4\left[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)\right]^2$$

(Đề thi vô địch toán vòng II, Belarussia, 1958)

Giải

Biểu thức có dạng: $A^2 - B^2$, trong đó

$A = 4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2); B = 2cd(a^2 + b^2) + 2ab(c^2 + d^2)$

Ta có: $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$A + B = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 2cd(a^2 + b^2) + 4abcd + 2ab(c^2 + d^2)$

$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2 + 2cd) + 2ab(2cd + c^2 + d^2)$

$= (c+d)^2(a^2 + b^2 + 2ab) = (c+d)^2(a+b)^2$

Tương tự như vậy, ta phân tích được: $A - B = (c-d)^2(a-b)^2$

Cuối cùng ta có: $A^2 - B^2 = (a+b)^2(a-b)^2(c+d)^2(c-d)^2$

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp thêm bớt và tách các hạng tử

a. Phương pháp tách một hạng tử:

Ví dụ 1 Phân tích thành nhân tử: $x^2 - 6x + 8$

Giải

Ta có thể có nhiều cách khác nhau để tách các hạng tử:

Cách 1:

$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 2x) - 4x + 8 = x(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x-4)$

Cách 2: $x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x-3)^2 - 1$

$= (x-3+1)(x-3-1) = (x-2)(x-4)$

Cách 3: $x^2-6x+8=(x^2-4)-6x+12=(x-2)(x+2)-6(x-2)$

$=(x-2)(x+2-6)=(x-2)(x-4)$

Cách 4: $x^2-6x+8=(x^2-16)-6x+24=(x-4)(x+4)-6(x-4)$

$=(x-4)(x+4-6)=(x-4)(x-2)$

Cách 5: $x^2-6x+8=(x^2-4x+4)-2x+4=(x-2)^2-2(x-2)$

$=(x-2)(x-2-2)=(x-2)(x-4)$

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a. $x^2-7xy+10y^2$; b. $a^2-5a-14$.

Giải

a. $x^2-7xy+10y^2=x^2-2xy-5xy+10y^2$

$=x(x-2y)-5y(x-2y)=(x-2y)(x-5y)$

b. $a^2-5a-14=a^2+2a-7a-14=a(a+2)-7(a+2)=(a+2)(a-7)$

Ví dụ 3: Phân tích thành nhân tử:

a. $2m^2+10m+8$; b. $4p^2-36p+56$;

c. x^3-5x^2-14x; d. $x^2yz+5xyz-14yz$.

Giải:

a. $2m^2+10m+8=2(m^2+5m+4)$

$=2\left[(m^2+2m+1)+(3m+3)\right]=2\left[(m+1)^2+3(m+1)\right]$

$=2(m+1)(m+1+3)=2(m+1)(m+4)$

b. $4p^2-36p+56=4(p^2-9p+14)$

$=4\left[(p^2-4p+4)-(5p-10)\right]=4\left[(p-2)^2-5(p-2)\right]$

$=4(p-2)(p-2-5)=4(p-2)(p-7)$

c. $x^3-5x^2-14x=x(x^2-5x-14)$

$=x\left[(x^2+4x+4)-(9x+18)\right]=x\left[(x+2)^2-9(x+2)\right]$

$=x(x+2)(x+2-9)=x(x+2)(x-7)$

d. $x^2yz+5xyz-14yz=yz(x^2+5x-14)$

$=yz\left[(x^2-4x+4)+(9x-18)\right]=yz\left[(x-2)^2+9(x-2)\right]$

$=yz(x-2)(x-2+9)=yz(x-2)(x+7)$

Ví dụ 4: Phân tích thành nhân tử: x^3+3x^2-4.

Giải:

Ta tách các hạng tử của đa thức trên bằng phương pháp tìm nghiệm của đa thức. Ta nhắc lại a là nghiệm của đa thức f(x) nếu f(a) = 0. Như vậy nếu đa thức f(x) chứa nhân tử (x – a) thì a phải là nghiệm của đa thức. Ta lại chú ý rằng nếu đa thức trên có một nhân tử là (x – a) thì nhân tử còn

lại là $x^2 + bx + c$, suy ra $-ac = -4$, tức là a phải là ước của –4. Tổng quát, trong đa thức với hệ số nguyên, nghiệm nguyên (nếu có) phải là ước của hạng tử không đổi. Ước của –4 là ± 1; ± 2; ± 4. Kiểm tra thấy 1 là nghiệm của đa thức. Như vậy, đa thức chứa nhân tử (x – 1), do đó ta tách các hạng tử của đa thức làm xuất hiện nhân tử chung (x – 1).

Cách 1: $x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4 = x^2(x-1) + 4(x^2-1)$

$= x^2(x-1) + 4(x-1)(x+1) = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$

Cách 2: $x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - 1 + 3x^2 - 3 = (x-1)(x^2+x+1) + 3(x^2-1)$

$= (x-1)(x^2+x+1) + 3(x-1)(x+1) = (x-1)(x^2+x+1+3x+3)$

$= (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$

Ta cũng chú ý rằng nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức chứa nhân tử (x – 1), nếu đa thức có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì đa thức chứa nhân tử (x + 1).

Ví dụ 5: Phân tích thành nhân tử: $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$.

Giải:

Cách 1: Các số ± 1; ± 3 không là nghiệm của đa thức, như vậy đa thức không có nghiệm nguyên. Nhưng đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ. Trong đa thức với hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất (bạn đọc tự chứng minh). Như vậy nghiệm hữu tỉ (nếu có) của đa thức chỉ có thể là ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 3; hoặc $\pm\frac{3}{2}$. Sau khi kiểm tra thấy $x = \frac{1}{2}$ là một nghiệm nên đa thức chứa nhân tử $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ hay $(2x-1)$. Do đó tìm cách tách các hạng tử của đa thức để xuất hiện nhân tử chung (2x – 1).

$2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 2x^3 - x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3$

$= x^2(2x-1) - 2x(2x-1) + 3(2x-1) = (2x-1)(x^2-2x+3)$

Cách 2: Có thể giải bài tập trên bằng phương pháp hệ số bất định: Nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$$(ax+b)(cx^2+dx+m).$$

Phép nhân này cho kết quả: $acx^3 + (ad+bc)x^2 + (am+bd)x + bm$.

Đồng nhất đa thức này với $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$, ta được: $\begin{cases} ac = 2 \\ ad + bc = -5 \\ am + bd = 8 \\ bm = -3 \end{cases}$.

Có thể giả thiết rằng $a > 0$ (vì nếu $a < 0$ thì ta đổi dấu cả hai nhân tử), do đó $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right.$

Xét $a = 2 \Rightarrow c = 1$, ta có $2d + b = -5;\ 2m + bd = 8;\ bm = -3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \pm 1 \\ b = \pm 3 \end{array}\right.$

Xét $b = -1 \Rightarrow m = 3;\ d = -2$ thỏa mãn các điều kiện trên.

Vậy $a = 2;\ c = 1;\ b = -1;\ d = -2;\ m = 3$.

Ta có: $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = (2x - 1)(x^2 - 2x + 3)$.

b. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử:

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử:

a. $a^4 + 64$; b. $a^4 + 4b^2$.

Giải

a. $a^4 + 64 = (a^2)^2 + 8^2 + 2.8a^2 - 2.8a^2 = (a^2 + 8)^2 - (4a)^2$

$= (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a) = (a^2 + 4a + 8)(a^2 - 4a + 8)$

b. $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$

$= (a^2 + 2b^2) - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a. $x^5 + x^4 + 1$ b. $x^8 + x + 1$ c. $x^8 + x^7 + 1$

Giải:

a. $x^5 + x^4 + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 - 1)$

$= x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$

b. $A = x^8 + x + 1 = (x^8 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

Ta có: $x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = \left(x^3 + 1\right)\left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$

Thay vào A, được: $A = x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)\left[x^2(x^3 + 1)(x - 1) + 1\right] = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$

c. $x^8 + x^7 + 1 = (x^8 - x^2) + (x^7 - x) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x)(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x)(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)\left[(x^2 + x)(x^3 + 1)(x - 1) + 1\right] = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

Chú ý: *Người ta chứng minh được rằng kết quả trong các phân tích trên đây là những đa thức không thể phân tích thành tích của những đa thức có bậc nhỏ hơn nữa. Nói riêng, tam thức bậc hai* $ax^2 + bx + c$ *không phân tích được thành nhân tử (là nhị thức bậc nhất) nếu* $\Delta = b^2 - 4ac$ *là số âm hoặc không phải là số chính phương.*

Ví dụ 3 Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử:

a. $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$;

b. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$; c. $n^8 + n^4 + 1$.

Giải:

a. $m^3 - 3m^2 - 3m^2 + 9m + 2m - 6$

$= m^2(m - 3) - 3m(m - 3) + 2(m - 3) = (m - 1)(m - 2)(m - 3)$

b. $x^4 + 3x^3 + 3x^3 + 9x^2 - x^2 - x^2 - 3x - 3x + 1$

Nhm các hạng tử thích hợp để có kết quả: $(x^2 + 3x - 1)^2$

c. Thm và bớt n^4 vào biểu thức và nhóm các hạng tử thích hợp:

Kế quả: $(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)(n^4 - n^2 + 1)$

c. Phưng pháp đặt biến phụ:

Ví dụ : Phân tích thành nhân tử: $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$.

Giải:

$A = (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12 = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$

Đặ $y = x^2 + x$, ta được: $A = y^2 + 4y - 12 = y^2 + 4y + 4 - 16$

$= (y + 2)^2 - 4^2 = (y + 2 + 4)(y + 2 - 4) = (y + 6)(y - 2)$

$= (x^2 + x + 6)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x + 6)(x - 1)(x + 2)$.

Ví dụ : Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$

Giải:

$x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặ $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức đã cho có dạng:

$(y - 12)(y + 12) + 128 = y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4)$

$= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 8) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

Nhận xét: *Trong ví dụ trên, nhờ phương pháp đổi biến, ta đã đưa đa thức bậc bốn đối với x thành đa thức bậc hai đối với y.*

Ví dụ : Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Giải:

Gi sử $x \neq 0$. Ta viết đa thức dưới dạng:

$$A = x^2\left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x - \frac{1}{x}\right) + 7\right]$$

Đặ $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$. Do đó

$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2$

$$= \left[x\left(x - \frac{1}{x}\right) + 3x\right]^2 = \left(x^2 + 3x - 1\right)^2$$

Dạng phân tích này cũng đúng với $x = 0$.

Chú ý: Có thể trình bày lời giải của ví dụ trên như sau:

$A = x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x + 1$

$= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$

Ví dụ 4. Phân tích thành nhân tử: $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 10$.

Giải:

Viết đa thức thành $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 10 = (x - y)^2 + 3(x - y) - 10$.

Đặt $x - y = u$. Ta có:

$u^2 + 3u - 10 = u^2 - 4 + 3u - 6$

$= (u - 2)(u + 2) + 3(u - 2) = (u - 2)(u + 5)$

Suy ra $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 10 = (x - y + 5)(x - y - 2)$.

Dạng 5: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử:

a. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ b. $(a + b)^3 - (a - b)^3$;

c. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$

Giải

a. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^2(a^4 - a^2 + 2a + 2)$

$= a^2(a + 1)\left[a^2(a - 1) + 2\right] = a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2)$.

b. $(a + b)^3 - (a - b)^3 = \left[(a + b) - (a - b)\right]\left[(a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2\right]$

$= 2b(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2) = 2b(3a^2 + b^2)$

c. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - y^3 = (x - 1)^3 - y^3$

$= (x - 1 - y)\left[(x - 1)^2 + (x - 1)y + y^2\right]$

$= (x - 1 - y)(x^2 - 2x + 1 + xy - y + y^2)$

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a. $2x^2(a + b + c) - 4xy(a + b + c) + 2y^2(a + b + c)$

b. $x^{m+4} + x^{m+3} - x - 1$.

Giải

a. $2x^2(a + b + c) - 4xy(a + b + c) + 2y^2(a + b + c)$

$= 2(a + b + c)(x^2 - 2xy + y^2) = 2(a + b + c)(x - y)^2$

b. $x^{m+4} + x^{m+3} - x - 1 = (x^{m+4} - x) + (x^{m+3} - 1)$

$= x(x^{m+3} - 1) + (x^{m+3} - 1) = (x + 1)(x^{m+3} - 1)$.

$= (x + 1)(x - 1)(x^{m+2} + x^{m+1} + \ldots + 1)$.

Ví dụ 3: Phân tích thành nhân tử: $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

(Đề thi vô địch toán lớp 8, vòng 1, Belarussia, 1952).

Giải

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = \left[(x + y + z)^3 - x^3\right] - (y^3 + z^3)$$

Áp dụng các hằng đẳng thức:

$$= (x + y + z - x)\left[(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2\right] - (y + z)(y^2 - yz + z^2)$$

$$= (y + z)\left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + xy + xz + x^2 + x^2 - y^2 + yz - z^2\right]$$

$$= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) = 3(y + z)\left[x(x + y) + z(x + y)\right]$$

$$= 3(x + y)(y + z)(x + z)$$

Chú ý: Có thể biến đổi như sau $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$$= \left\{\left[(x + y) + z\right]^3 - (x + y)^3 - z^3\right\} + 3x^2y + 3xy^2$$

$$= \left[3(x + y)z(x + y + z)\right] + 3xy(x + y)$$

$$= 3(x + y)(xz + zy + z^2 + xy) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

Ví dụ 4: Phân tích thành nhân tử: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

(Đề thi vào lớp 10 CT Lê Hồng Phong, Tp HCM, 1988)

Giải

Cách 1: Áp dụng các hằng đẳng thức:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b); a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ta được: $M = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= (x + y)^3 + z^3 - 3xyz - 3x^2y - 3xy^2$$

$$= (x + y + z)\left[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2\right] - 3xy(x + y + z)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Cách 2:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z) + 3yz(x + y + z) - 3xyz$$

Từ đây ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= (x + y + z)^3 - (x + y + z)(3xy + 3yz + 3xz)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

Ví dụ 5: Phân tích thành nhân tử: $(x+y)^5 - x^5 - y^5$.

Giải

Khai triển: $(x+y)^5$ theo nhị thức Newton, ta có:

$A = (x+y)^5 - x^5 - y^5$

$= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$

Mà $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$; $2x^2y + 2xy^2 = 2xy(x+y)$

Do đó: $A = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$

Ví dụ 6: Phân tích thành nhân tử: $A = (x^2+y^2)^3 + (z^2-x^2)^3 - (y^2+z^2)^3$.

(Đề thi vô địch toán lớp 8, vòng I, Belarussia, 1957)

Giải:

Cách 1: Biến đổi $(x^2+y^2)^3 + (z^2-x^2)^3$ theo công thức tổng của hai lập phương, ta được: $(y^2+z^2)\left[(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(z^2-x^2) + (z^2-x^2)^2\right]$

Thay vào A, ta có: $A = (y^2+z^2).B$. Trong đó:

$B = \left[(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2)(z^2-x^2)\right] + \left[(z^2-x^2)^2 - (y^2+z^2)^2\right]$

$= \left[(x^2+y^2)(2x^2+y^2-z^2)\right] + \left[(2z^2-x^2+y^2)(-x^2-y^2)\right] = (x^2+y^2)(3x^2-3z^2)$

Vậy: $A = 3(y^2+z^2)(x^2+y^2)(x^2-z^2)$

Cách 2: Chú ý rằng: $y^2+z^2 = (x^2+y^2) + (z^2-x^2)$. Ta có thể giải đơn giản như sau: Thay $(y^2+z^2)^3 = \left[(x^2+y^2)+(z^2-x^2)\right]^3$ vào A, ta có:

$A = -3(x^2+y^2)^2(z^2-x^2) - 3(x^2+y^2)(z^2-x^2)^2$

$= 3(x^2+y^2)(x^2-z^2)(x^2+y^2+z^2-x^2) = 3(x^2+y^2)(x^2-z^2)(y^2+z^2)$

Ví dụ 7: Phân tích thành nhân tử:

$A = 3abc + a^2(a-b-c) + b^2(b-a-c) + c^2(c-a-b) - c(b-c)(a-c)$

Giải

Trước hết, ta biến đổi:

$B = 3abc + a^2(a-b-c) + b^2(b-a-c) + c^2(c-a-b)$

$= 3abc + a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2a - a^2c - b^2c - c^2a - c^2b$

$= a^2(a-b) + b^2(b-a) + c(2ab - a^2 - b^2) + c(c^2 - bc - ac + ab)$

$= (a-b)(a^2-b^2) - c(a-b)^2 + c(c-a)(c-b)$

$= a - b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)$

$A = B - c(b-c)(a-c) = (a-b)^2(a+b-c)$

Ví dụ : Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $a^{16} + a^8b^8 + b^{16}$

(Đề thi học sinh giỏi cấp II miền Bắc, 1967)

Giải

$P = a^{16} + a^8b^8 + b^{16} = (a^8)^2 + 2a^8b^8 + (b^8)^2 - a^8b^8$

$= a^8 + b^8)^2 - (a^4b^4)^2 = (a^8 + b^8 + a^4b^4)(a^8 + b^8 - a^4b^4)$

Tip tục phân tích nhân tử $(a^8 + b^8 + a^4b^4)$ theo cách thêm bớt trên ta đưc: $a^8 + b^8 + a^4b^4 = (a^4 + b^4 + a^2b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)$

Lạ phân tích $a^4 + b^4 + a^2b^2$ thành nhân tử theo cách trên ta có:

$a^4 + b^4 + a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$. Kết quả:

$P = (a^8 + b^8 - a^4b^4)(a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$

Ví dụ: Phân tích thành nhân tử: $P = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$

Giải:

Cách : Khai triển hai hạng tử cuối:

$P = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = ab(a-b) + b^2c \ + c^2a - ca^2 - b\,c^2$

$= ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a+b)(a-b)$

$= (a-b)[a(b-c) - c(b-c)] = (a-b)(b-c)(a-c)$

Cách : Tách $(b-c)$ thành $-[(a-b)+(c-a)]$

$P = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$

$= ab(a-b) - bc[(a-b)+(c-a)] + ca(c-a)$

$= (a-b)(a-c) + c(c-a)(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)$

Dạng6: Sử dụng phân tích thành nhân tử để giải phương trình bậc cao

Ví dụ Giải phương trình: $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$

Giải:

Bin đổi phương trình thành: $(x+1)(x+2)(2x+1) = 0$.

Phương trình có ba nghiệm: $x_1 = -1;\ x_2 = -2;\ x_3 = -\dfrac{1}{2}$.

Dạng7: Sử dụng phân tích thành nhân tử để giải các bài toán khác

Ví dụ1: Phân tích thành thừa số: $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác thì $A > 0$.

(Đề thi vào chuyên toán miền Bắc, 1979)

Giải:

Thêm bớt các hạng tử thích hợp và nhóm các hạng tử:

$$A = 4a^2b^2 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + (2b^2c^2 + 2a^2c^2) - c^4$$

$$= (2ab)^2 - \left[(a^2 + b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) + c^4\right] = (2ab)^2 - \left[(a^2 + b^2) - c^2\right]^2$$

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= (a + b + c)(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b)$$

Nếu a, b, c là các cạnh của tam giác thì $a > 0, b > 0, c > 0$ và các nhân tử của biểu thức đều dương (theo các bất đẳng thức về các cạnh trong tam giác)) nên $A > 0$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có:

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc$$

(Đề thi vô địch toán Úc, 1971)

Giải

Vì vai trò của a, b, c là như nhau, nên có thể giả thiết: $a \ge b \ge c > 0$.

Có thể thấy rằng phải chứng minh: $B \ge 0$, với

$$B = 3abc + a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2a - a^2c - b^2c - c^2a - c^2b$$

$$= a^2(a - b) + b^2(b - a) + c(2ab - a^2 - b^2) + c(c^2 - bc - ac + ab)$$

$$= (a - b)(a^2 - b^2) - c(a - b)^2 + c(c - a)(c - b)$$

$$= (a - b)^2(a + b - c) + c(b - c)(a - c)$$

Vậy $B = (a - b)^2(a + b - c) + c(b - c)(a - c)$

Do giả thiết $a \ge b \ge c, c > 0$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: a) Phân tích ra thừa số: $A = a^4 - 6a^3 + 27a^2 - 54a + 32$

b) Từ kết quả câu trên suy ra rằng biểu thức: $n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32$ luôn luôn là số chẵn với mọi số nguyên n.

(Đề thi vào lớp chuyên toán miền Bắc, 1975)

Giải:

a) Ta có: $a = 1 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (a - 1)$

$a = 2 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (a - 2)$. Vậy $A \vdots (a - 1)(a - 2)$

Thực hiện phép chia A cho $(a - 1)(a - 2)$ ta có kết quả:

$$A = a^4 - 6a^3 + 27a^2 - 54a + 3a = (a - 1)(a - 2)(a^2 - 3a + 16)$$

Chú ý: Có thể phân tích theo phương pháp nhóm số hạng và sử dụng các hằng đẳng thức.

b) Theo kết quả phần a), ta có:

$$n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32 = (n - 2)(n - 1)(n^2 - 3n + 16)$$

$n - 2$ và $n - 1$ là hai số nguyên liên tiếp, chắc chắn phải có một số chia hết cho 2.

Ví dụ 4: Cho biết $a+b+c=0$, chứng minh rằng:

$(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$

Giải

$a+b+c=0 \Rightarrow a=-(b+c) \Rightarrow a^2-b^2-c^2=2bc$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

Cộng $a^4+b^4+c^4$ vào hai vế của đẳng thức cuối này ta được đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu $a+b+c=0$ (1) thì $a^3+b^3+c^3=3abc$. (2)

Đảo lại, nếu có (2) thì có (1) không?

Giải

Trong bài trên, ta đã chứng minh rằng:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Do đó, nếu có (1) thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, tức (2). Đảo lại, khi có (2) thì ta có: $a+b+c=0$ (1) hoặc $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$ (3). Từ (3) ta có $a=b=c$ (4). Vậy nếu có (2) thì suy ra $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$,

nghĩa là: $\left[\begin{array}{l}(2)\Rightarrow(1)\\(2)\Rightarrow(4)\end{array}\right.$

Ví dụ 6:

a. Chứng minh rằng từ đẳng thức:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2$ ta suy ra $x=y=z$.

b. Chứng minh rằng nếu: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ thì $a=b=c$.

Giải

a. Áp dụng hằng đẳng thức về bình phương đa thức, ta đưa vế phải về:

$3\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$. Từ đây suy ra:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$x-y=y-z=z-x=0$ tức $x=y=z$.

b. Theo giả thiết: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$

Ta có: $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$

Suy ra: $(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $a-b=b-c=a-c=0$, tức là $a=b=c$.

Ví dụ 7: a. x, y, z liên hệ với nhau bởi các đẳng thức:

$x^2 - y = a; y^2 - z = b; z^2 - x = c$. Tính giá trị của biểu thức:

$P = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$

b. Cho $x + y = a, x^2 + y^2 = b, x^3 + y^3 = c$. Chứng minh rằng $a^3 - 3ab + 2c = 0$

Giải

a. Phân tích P thành nhân tử:

$P = x^3\left(z - y^2\right) + y^3\left(x - z^2\right) + z^3\left(y - x^2\right) + x^2y^2z^2 - xyz.$

$= y^2z^2\left(x^2 - y\right) - z^3\left(x^2 - y\right) - xy^2\left(x^2 - y\right) + xz\left(x^2 - y\right)$

$= \left(x^2 - y\right)\left(y^2z^2 - z^3 - xy^2 + xz\right) = \left(x^2 - y\right)\left[y^2\left(z^2 - x\right) - z\left(z^2 - x\right)\right]$

$= \left(x^2 - y\right)\left(z^2 - x\right)\left(y^2 - z\right) = abc$

b. Ta có: $A = a^3 - 3ab + 2c = \left(x + y\right)^3 - 3\left(x + y\right)\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(x^3 + y^3\right)$

Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ, đặt nhân tử chung và rút gọn ta đưa biểu thức về dạng: $A = \left(x + y\right).0 = 0$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thỏa mãn hệ thức:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$ thì hai trong ba số đó phải là hai số đối nhau.

Giải

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c} \Rightarrow \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{1}{a + b + c}$

$\Rightarrow \left(bc + ca + ab\right)\left(a + b + c\right) = abc \Rightarrow \left(bc + ca + ab\right)\left(a + b + c\right) - abc = 0$

$\Rightarrow \left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) = 0$

$\Rightarrow a + b = 0\left(a = -b\right)$ hoặc $b + c = 0\left(b = -c\right)$ hoặc $c + a = 0\left(c = -a\right)$

Ví dụ 9: a. Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức

$P\left(x\right) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $\left(x - 3\right)^3$.

b. Xác định các giá trị a, b sao cho đa thức:

$Q\left(x\right) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ chia hết cho đa thức $M\left(x\right) = x^2 - x + b$

c. Xác định a, b để $P(x) = x^3 + 5x^2 - 8x + a$ chia hết cho $M(x) = x^2 + x + b$.

Giải

a. Chia $P\left(x\right)$ cho $\left(x - 3\right)^3$ ta được thương là $x + 9$ và dư là

$R\left(x\right) = \left(a + 54\right)x^2 + \left(b - 216\right)x + 243 + c$.

$P\left(x\right) \vdots \left(x - 3\right)^3 \Rightarrow R\left(x\right) \equiv 0$. Cho ta:

$a + 54 = 0 \Rightarrow a = -54; b - 216 = 0 \Rightarrow b = 216; c + 243 = 0 \Rightarrow c = -243.$

b. Chia Q(x) cho M(x) ta được:

Thương $6x^2 - x + (a - 6b - 1)$; Dư $(a - 5b + 2)x + (-ab + 6b^2 + b + 2)$

Từ điều kiện Q(x) ⋮ M(x) suy ra: $a - 5b + 2 = 0$ (1)

$-a + 6b^2 + b + 2 = 0$ (2). Tính a từ (1) theo b, thay vào (2)

$b^2 - 3b + 2 = 0 \Rightarrow (b + 1)(b + 2) = 0$ cho ta $b = -1 \Rightarrow a = -7$

$b = -2 \Rightarrow a = -12$.

Ví dụ 0: Hãy xác định các số a, b, c để có đẳng thức:

$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c)$

Giải

Hãy khai triển vế phải và đồng nhất hệ số của các hạng tử cùng bậc.

$a + b + c = a$ (1) ; $ab + bc + ac = b$ (2); $abc = c$ (3)

$(1) \Rightarrow b + c = 0 \Leftrightarrow b = -c; (3) \Leftrightarrow c(ab - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ ab = 1 \end{array}\right.$

TH: Với c = 0, ta có b = 0 và a có thể lấy tùy ý.

TH2: Với ab = 1, thay vào (2) đồng thời thay $c = -b$ ta có:

$ab - b^2 - ab = b \Leftrightarrow b(b + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -1 \\ b = 0 \end{array}\right.$

a. Với b = 0 ta trở về trường hợp 1.

b. Với $b = -1$ ta có c = 1 và $a = -1$.

Ví dụ 1: Ta biết rằng: (1) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Chứng minh rằng $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$

Với

(2) $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$

(3) Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

(4) Nếu $a + b + c + d = 0$ thì: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ab - cd)(c + d)$

Giải

Chứng minh $(1) \Rightarrow (2)$:

Ta có trong (1) thay b bởi b + c:

$a^3 + (b + c)^3 = (a + b + c)^3 - 3a(b + c)(a + b + c)$

Thay $(b + c)^3$ theo (1)

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(b + c)\underbrace{[bc + a(a + b + c)]}_{(a+b)(c+a)}$

Chứng minh $(2) \Rightarrow (3)$: Thay a + b + c = 0,

$a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$ vào vế phải của (2), ta có (3)

Chứng minh $(3) \Rightarrow (4)$: Thay c bởi c + d vào (3)

$$a^3 + b^3 + (c+d)^3 = 3ab(c+d)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ab(c+d) - 3cd(c+d) = 3(ab - cd)(c+d)$$

Ví dụ 12: Cho a, b, c là ba số phân biệt; chứng minh rằng:

$$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) \neq 0.$$

Giải:

$$S = a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = a^4b - a^4c + b^4c - b^4a + c^4(a-b)$$

$$= (a-b)\left[a^3(b-c) + a^2b(b-c) + ab^2(b-c) - c(b^3 - c^3)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)\left[a^3 - c^3 + b(a^2 - c^2) + b^2(a-c)\right]$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)(b-c)(a-c)\left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right]$$

Do a, b, c là ba số phân biệt: $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, nên $S \neq 0$, đpcm.

Dạng 8: Sử dụng định lý Bezout vào phân tích đa thức thành nhâm tử

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử đa thức sau: $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

Giải

Ta thử vận dụng định lý Bezout

Bước 1: Thử x = 2 ta thấy:

$f(2) = 2^3 - 2^2 - 28 + 24 = 0$. Vậy 2 là một nghiệm của f(x). Theo hệ quả của định lý Bezout thì f(x) chia hết cho x – 2.

$f(x) = (x-2)p(x)$.

Bước 2: Thực hiện phép chia f(x) cho x – 2.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 - 14x + 24 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + x - 12 \\
\quad x^2 - 14x + 24 & \\
\quad \underline{x^2 - 2x} & \\
\qquad -12x + 24 & \\
\qquad \underline{-12x + 24} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Vậy $f(x) = (x-2)(x^2 + x - 12)$

Bước 3: $p(x) = x^2 + x - 12$ có p(3) = 0 tức là x = 3 là nghiệm của p(x).

Vậy p(x) chia hết cho x – 3.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + x - 12 & x - 3 \\
\underline{x^2 - 3x\quad} & \overline{x + 4} \\
4x - 12 & \\
\underline{4x - 12} & \\
0 &
\end{array}
$$

$p(x) = (x - 3)(x + 4)$. Vậy $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$

Ví dụ : Phân tích thành nhân tử: $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

Giải

Hạng tử độc lập có các ước số $\pm 1, \pm 3$. Ta chỉ thử trong bốn số $\pm 1, \pm 3$ mà thôi. $f(+1) = 12$, $f(-1) = 2$, $f(3) = 78$, $f(-3) = 0$.

Vậy f(x) chia hết cho x + 3. Chia f(x) cho x + 3.

$(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) : (x + 3) = x^2 + x + 1$

Vậy: $x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x^2 + x + 1)$

Ví dụ : Phân tích thành nhân tử:

a. $x^3 - 7x - 6$; b. $x^3 - 19x - 30$;

c. $a^3 - 6a^2 + 11a - 6$.

Giải

a. ***Cách 1:***

$x^3 - 7x - 6 = x^3 - x - 6x - 6 = x^3 - x - 6(x + 1)$

$= x(x^2 - 1) - 6(x + 1) = (x + 1)[x(x - 1) - 6]$

$= (x + 1)[x^2 - x - 6] = (x + 1)[(x^2 + 2x - 3x - 6)]$

$= (x + 1)[x(x + 2) - 3(x + 2)] = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

Cách 2: Áp dụng định lý Bezout:

Đặt $f(x) = x^3 - 7x - 6$, ta thấy $f(-1) = 0$ nên -1 là một ước của f(x).

Vậy f(x) chia hết cho (x + 1). Ta có: $f(x) = (x + 1)(x^2 - x - 6)$

Ta thấy $x = -2$ là nghiệm của $x^2 - x - 6$ ta suy ra được:

$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. Kết quả: $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b. ***Cách 1:***

$x^3 - 19x - 30 = (x^3 - 9x) - (10x + 30) = x(x^2 - 9) - 10(x + 3)$

$= (x + 3)(x^2 - 3x - 10) = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$.

Cách 2: Áp dụng định lý Bezout:

Bài tập vận dụng

1. Chứng minh rằng từ đẳng thức:

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2 \quad (1)$$

Ta suy ra: $x=y=z$

2. Tính tổng: $(S-2b)(S-2c)+(S-2c)(S-2a)+(S-2a)(S-2b)$ trong đó $S=a+b+c$

3. Phân tích thành nhân tử: $(xy+1)^2-(x+y)^2$.

4. Phân tích thành nhân tử: $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$.

5. Phân tích thành nhân tử: $a(b^2-c^2)-b(a^2-c^2)+c(a^2-b^2)$.

6. Phân tích thành nhân tử: $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)$.

7. Phân tích thành nhân tử: $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+2abc$.

8. Phân tích thành nhân tử: $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$.

9. Phân tích thành nhân tử: $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$.

10. Phân tích thành nhân tử: $a^3+b^3+c^3-3abc$.

11. Phân tích thành nhân tử: $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

12. Phân tích thành nhân tử: $x^2-2x-35$.

13. Phân tích thành nhân tử: $9x^2+6x-8$.

14. Phân tích thành nhân tử: $4x^2-3x-1$.

15. Phân tích thành nhân tử: $6x^4-11x^2+3$.

16. Phân tích thành nhân tử: $x^2-7xy+12y^2$.

17. Phân tích thành nhân tử: $x^2-2xy+y^2+3x-3y-10$.

18. Phân tích thành nhân tử: $2x^3-12x^2+17x-2$.

19. Phân tích thành nhân tử: x^3-3x+2.

20. Phân tích thành nhân tử: x^3+3x^2+6x+4.

21. Phân tích thành nhân tử: $x^3+9x^2+26x+24$.

22. Phân tích thành nhân tử: $2x^3-5x^2+8x-3$.

23. Phân tích thành nhân tử: $3x^3-14x^2+4x+3$.

24. Phân tích thành nhân tử: a^5+a+1.

25. Phân tích thành nhân tử: a^7+a^2+1.

26. Phân tích thành nhân tử: $(1+x^2)^2-4x(1-x^2)$.

27. Phân tích thành nhân tử: $x^4+6x^3+11x^2+6x+1$.

28. Tìm số nguyên a sao cho đa thức $(x+a)(x-5)+2$ phân tích được thành $(x+b)(x+c)$ với b, c là các số nguyên.

29. Tm số nguyên m sao cho $(x + m)(x + 5) + 3$ phân tích được thành $(x + a)(x + b)$ với a, b là các số nguyên.

30. Phn tích đa thức thành nhân tử: $3x^2 - 8x + 4$.

31. Phn tích đa thức thành nhân tử: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

32. Phn tích đa thức thành nhân tử: $4x^4 + 81$

33. Phn tích đa thức thành nhân tử: $64x^4 + y^4$

34. Phn tích đa thức thành nhân tử: $x^5 + x - 1$

35. Phn tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^2 - 1$

36. Phn tích đa thức thành nhân tử: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

37. Cb $a + b + c = 0$. Rút gọn biểu thức: $M = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc$

38. Phn tích đa thức sau thành nhân tử: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

39. Phn tích các đa thức sau thành nhân tử:

$8(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3$

40. Phn tích đa thức sau thành nhân tử: $P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$

41. Phn tích thành nhân tử:

a. $ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a - c)$

b. $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

c. $(a + b)(a^2 - b^2) + (b + c)(b^2 - c^2) + (c + a)(c^2 - a^2)$

d. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

e. $a^3(c - b^2) + b^3(a - c^2) + c^3(b - a^2) + abc(abc - 1)$

42. Cứng minh rằng nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và a, b, c là các số dương thì $a = b = c$.

43. Cứng minh rằng nếu $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ và a, b, c, d là các số dưng thì $a = b = c = d$.

44. Cứng minh rằng nếu $m = a + b + c$ thì:

$(am + bc)(bm + ac)(cm + ab) = (a + b)^2(b + c)^2 + (c + a)^2$

45. Cb $a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1,\ ac + bd = 0$. Chứng minh rằng $ab + cd = 0$.

46. Rt gọn phân số: $\dfrac{19...9}{99...95}$ với n chữ số 9 ở tử và n chữ số 9 ở mẫu (n là số ự nhiên)

47. Tìh số trị của phân thức sau bằng cách nhanh nhất:

$\dfrac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$ với $a = 102$.

48. Số nào lớn hơn: $\dfrac{1981 - 1980}{1981 + 1980}$ hay $\dfrac{1981^2 - 1980^2}{1981^2 + 1980^2}$?

49. Số nào lớn hơn: $\dfrac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1}$ hay $\dfrac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1}$?

50. Tìm giá trị của $\dfrac{a+b}{a-b}$ nếu $2a^2+2b^2=5ab$ và $b>a>0$.

51. Chứng minh rằng nếu: $c^2+2(ab-ac-bc)=0$; $b\neq c$; $a+b\neq c$ thì $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\dfrac{a-c}{b-c}$

52. Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$. Chứng minh rằng phân thức trên không phụ thuộc vào x, có nghĩa với mọi x và a.

53. Chứng minh rằng nếu: $x=by+cz$ (1); $y=ax+cz$ (2); $z=ax+by$ (3) và $x+y+z\neq 0$ thì $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$.

54. Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)}+\frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)}+\frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}.$$

Hướng dẫn và đáp số

1. $(1)\Leftrightarrow[(y+z-2x)^2-(y-z)^2]+[(z+x-2y)^2-(z-x)^2]$

$$+[(x+y-2z)^2-(x-y)^2]=0\ (2).$$

Hạng tử thứ nhất: $(y+z-2x)^2-(y-z)^2=4(y-x)(z-x)$

Ta nhận thấy nếu hoán vị vòng $y\to z\to x\to y$ thì từ hạng tử thứ nhất ta có hạng tử thứ hai, và từ hạng tử thứ hai, ta có hạng tử thứ ba.

Do đó: $(z+x-2y)^2-(z-x)^2=4(z-y)(x-y)$

$(x+y-2z)^2-(x-y)^2=4(x-z)(y-z)$. Bởi vậy:

$(2)\Leftrightarrow 4(y-x)(z-x)+4(z-y)(x-y)+4(x-z)(y-z)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\Rightarrow x-y=x-z=y-z=0\Rightarrow x=y=z$

2. $(S-2b)(S-2c)=(a-b+c)(a+b-c)=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+2bc\ (1)$.

Hoán vị vòng $b\to c\to a\to b$, ta được:

$(S-2c)(S-2a)=b^2-c^2-a^2+2ca\ (2)$

$(S-2a)(S-2b)=c^2-a^2-b^2+2ab\ (3)$.

Từ (1), (2), (3) ta suy ra kết quả: $-a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ca$

3. $(xy+1)^2-(x+y)^2=(xy+1+x+y)(xy+1-x-y)$

$=(x+1)(y+1)(x-1)(y-1)$

4. ***Cách 1:*** $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a+b)^2-2c(a+b)+c^2-4c^2$

$=2(a+b)^2-2c^2=2(a+b+c)(a+b-c)$

Cách 2: $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$

$=(a+b+c)^2+(a+b-c+2c)(a+b-c-2c)$

$=(a+b+c)^2+(a+b+c)(a+b-3c)$

$=(a+b+c)(a+b+c+a+b-3c)=2(a+b+c)(a+b-c)$

5. ***Cách 1:*** Khai triển hai số hạng cuối:

$a(b^2-c^2)-b(a^2-c^2)+c(a^2-b^2)$

$=a(b^2-c^2)-a^2b+bc^2+a^2c-b^2c=a(b^2-c^2)-a^2(b-c)-bc(b-c)$

$=(b-c)(ab+ac-a^2-bc)=(b-c)[c(a-b)-a(a-b)]$

$=(b-c)(a-b)(c-a)$

Cách 2: Nhận xét (a^2-c^2) có thể tách thành $(b^2-c^2)+(a^2-b^2)$ nên:

$a(b^2-c^2)-b(a^2-c^2)+c(a^2-b^2)$

$=a(b^2-c^2)-b\left[(b^2-c^2)+(a^2-b^2)\right]+c(a^2-b^2)$

$=(b^2-c^2)(a-b)-(a^2-b^2)(b-c)=(b-c)(a-b)[(b+c)-(a+b)]$

$=(b-c)(a-b)(c-a)$.

6. Viết $(b-c)$ dưới dạng $-[(a-b)+(c-a)]$.

Đáp số: $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)=(a-b)(a-c)(b-c)$.

7. $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+2abc$

$=ab(a+b)+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+2abc$

$=ab(a+b)+c^2(a+b)+c(a^2+b^2+2ab)$

$=(a+b)(ab+c^2+ca+cb)=(a+b)(b+c)(c+a)$

8. Chú ý: $c^3-a^3=-[(b^3-c^3)+(a^3-b^3)]$.

Đáp số:

$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. Đáp số:

$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$

10. Viết a^3+b^3 dưới dạng $(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$. Do đó:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right]$$

11. Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$, ta có:

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=(a+b)^3+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$$
$$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$$
$$=3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=3(a+b)(b+c)(a+c).$$

12. Ba số hạng của đa thức không có thừa số chung cũng không lập thành bình phương một nhị thức. Do đó ta nghĩ đến việc tách một số hạng thành hai để tạo thành đa thức có 4 số hạng. Có nhiều cách tách số hạng trong đó hai cách sau là thông dụng nhất:

Cách 1: Tách số hạng cuối để cùng với 2 số hạng đầu tạo thành bình phương một nhị thức, rồi đưa về dạng hiệu hai bình phương:

$$x^2-2x-35=x^2-2x+1-36=(x-1)^2-6^2$$
$$=(x-1+6)(x-1-6)=(x+5)(x-7)$$

Cách 2: Tách số hạng giữa thành hai số hạng rồi dùng phương pháp nhóm các số hạng và đặt thừa số chung làm xuất hiện thừa số chung mới:

$$x^2-2x-35=x^2+5x-7x-35=x(x+5)-7(x+5)=(x+5)(x-7)$$

13. ***Cách 1:*** $9x^2+6x-8=(3x)^2+2.3x+1-9=(3x+1)^2-3^2$

$$=(3x+1-3)(3x+1+3)=(3x-2)(3x+4)$$

Cách 2: $9x^2+6x-8=9x^2-6x+12x-8$

$$=3x(3x-2)+4(3x-2)=(3x-2)(3x+4)$$

Chú ý: *Cách tách số hạng giữa thành hai số hạng chính là dựa vào hằng đẳng thức:* $mpx^2+(mq+np)x+nq=(mx+n)(px+q)$

Như vậy trong tam thức ax^2+bx+c*, hệ số b được tách thành* b_1+b_2 *sao cho* $b_1b_2=ac$*. Trong thực hành, ta làm như sau:*

1. Tìm tích ac.

2. Phân tích ac ra tích 2 thừa số (nguyên) bằng mọi cách.

3. Chọn 2 thừa số mà tổng bằng b.

Ví dụ trong đa thức $9x^2 + 6x - 8$ *thì* $a = 9$; $b = 6$; $c = -8$.

Bước 1: Tích $ac = 9.(-8) = -72$.

Bước 2: Phân tích −72 ra tích 2 thừa số (nguyên) trong đó thừa số dương có giá trị tuyệt đối lớn (để tổng bằng 6) được:

$(-1).72 = (-2).36 = (-3).24 = (-4).18 = (-6).12 = (-8).9$

Bước 3: Chọn hai thừa số mà tổng bằng 6. Đó là −6 và 12.

Nên làm theo cách 2 trong trường hợp tam thức $ax^2 + bx + c$ *có b là số lẻ hoặc a không là bình phương của một số nguyên.*

14. $4x^2 - 3x - 1 = 4x^2 - 4x + x - 1 = 4x(x-1) + (x-1) = (x-1)(4x+1)$

Chú ý: Cũng có thể nhận xét đa thức có tổng các hệ số bằng $4 - 3 - 1 = 0$ nên chứa thừa số $(x - 1)$. Do đó tách số hạng làm xuất hiện thừa số chung $(x - 1)$.

15. Đáp số: $(3x^2 - 1)(2x^2 - 3)$.

16. Đáp số: $(x - 3y)(x - 4y)$.

17. Viết đa thức thành $(x - y)^2 + 3(x - y) - 10$. Đặt $x - y = u$, phân tích $u^2 + 3u - 10$ ra $(u + 5)(u - 2)$. Đáp số: $(x - y + 5)(x - y - 2)$.

18. $2x^3 - 12x^2 + 17x - 2 = 2x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 16x + x - 2$

$= 2x^2(x - 2) - 8x(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(2x^2 - 8x + 1)$

Chú ý. *Tam thức* $(2x^2 - 8x + 1)$ *không phân tích ra thừa số được nữa.*

Khi phân tích theo cách 1, sau khi đưa tam thức $ax^2 + bx + c$ *về dạng* $a(x^2 - k)$, *nếu k có dạng* m^2 *(với m hữu tỉ) thì tam thức phân tích tiếp được ra thừa số, nếu không có dạng trên thì không phân tích được (trong phạm vi số hữu tỉ). Khi phân tích theo cách 2, sau khi tính tích ac và phân tích ac ra tích hai thừa số (nguyên) bằng mọi cách, nếu không có 2 thừa số nào mà tổng bằng b thì không phân tích tiếp được.*

Với tam thức trên, ta có:

$$2x^2 - 8x + 1 = 2\left(x^2 - 4x + 4 - \frac{7}{2}\right) = 2\left[(x-2)^2 - \frac{7}{2}\right]$$

Vì $\frac{7}{2}$ *không là bình phương của số hữu tỉ nào nên không phân tích được tam thức ra thừa số. Còn nếu tính tích ac, ta được 2. Phân tích thành tích 2 thừa số cùng âm, ta có:* $(-1).(-2)$. *Không có 2 thừa số nào có tổng bằng −8. Như vậy, không phân tích tiếp tam thức trên ra thừa số được. Làm thế nào để tách các số hạng của đa thức* $(2x^3 - 12x^2 + 17x - 2)$ *như trên?*

Trước hết, ta kiểm tra xem đa thức có chứa thừa số $x-a$ không, tức là tìm số dư khi chia đa thức cho $x-a$. Theo bài 13, số dư đó bằng số trị của đa thức khi $x=a$. Như vậy nếu thay x bằng a mà số trị đa thức bằng 0 thì khi phân tích ra thừa số đã có một thừa số là $x-a$. Do đó ta sẽ tách các số hạng của đa thức làm xuất hiện thừa số chung $x-a$. Giá trị $x=a$ đó còn gọi là nghiệm của đa thức (nghiệm của đa thức P(x) là giá trị của x làm cho số trị đa thức bằng 0).

Trong một đa thức với hệ số nguyên, nghiệm nguyên (nếu có) phải là ước số của số hạng tự do. Do đó chỉ cần xét a là ước số của số hạng tự do. Ví dụ đối với $(2x^3-12x^2+17x-2)$, số hạng tự do là –2, các ước của nó là ±1; ±2. Với $x=2$ thì số trị đa thức bằng 0, do đó ta tách các số hạng của đa thức đó xuất hiện thừa số chung $x-2$.

19. ***Cách 1:*** Vì tổng các hệ số bằng 0 nên đa thức chứa thừa số $x-1$. Do đó:

$$x^3-3x+2=x^3-1-3x+3$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2).$$

Tiếp tục phân tích $(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)$.

Kết quả: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

Cách 2: Nhận xét với $x=-2$ thì số trị đa thức bằng 0 nên đa thức chứa thừa số $x+2$. Do đó:

$$x^3-3x+2=x^3+8-3x-6=(x+2)(x^2-2x+4)-3(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2-2x+1)=(x+2)(x-1)^2.$$

20. ***Cách 1:*** Vì tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ đối với x bằng tổng các hệ số của lũy thừa bậc chẵn đối với x $(1+6=3+4)$. Do đó:

$$x^3+3x^2+6x+4=x^3+1+3x^2+6x+3$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)+3(x^2+2x+1)=(x+1)(x^2-x+1)+3(x+1)^2$$
$$=(x+1)(x^2-x+1+3x+3)=(x+1)(x^2+2x+4).$$

Cách 2: $x^3+3x^2+6x+4=x^3-8+3x^2+6x+12$

$$=(x-2)(x^2+2x+4)+3(x^2+2x+4)=(x^2+2x+4)(x+1)$$

21. Biến đổi đa thức $x^3+9x^2+26x+24=x^3+9x^2+27x+27-x-3$ hay $(x+3)^3-(x+3)$.

Đáp số: $x^3+9x^2+26x+24=(x+3)(x+4)(x+2)$.

22. $2x^3-5x^2+8x-3=2x^3-x^2-4x^2+2x+6x-3$

$$=x^2(2x-1)-2x(2x-1)+3(2x-1)=(2x-1)(x^2-2x+3)$$

Chú ý: Các số ± 1; ± 3 *không phải là nghiệm của đa thức. Như vậy đa thức không có nghiệm nguyên. Nhưng đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ. Ta chứng minh được trong một đa thức với hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng* $\frac{p}{q}$ *trong đó p là ước số của số hạng tự do, q là ước dương của hệ số số hạng bậc cao nhất. Như vậy, nghiệm hữu tỉ (nếu có) của đa thức trên là* ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; ± 3; $\pm\frac{3}{2}$. *Sau khi kiểm tra, ta thấy* $x = \frac{1}{2}$ *là một nghiệm. Như vậy đa thức chứa thừa số* $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *hay (2x – 1). Do đó ta tìm cách tách các số hạng của đa thức để xuất hiện thừa số chung (2x – 1).*

23. Chú ý $x = -\frac{1}{3}$ là một nghiệm của đa thức nên đa thức chứa thừa số $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ hay $(3x + 1)$.

Đáp số: $3x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = (3x + 1)(x^2 - 5x + 3)$.

24. ***Cách 1:*** Để "nối" từ a^5 đến a, ta thêm bớt các số hạng a^4, a^3, a^2. Như vậy:

$$\begin{aligned}a^5 + a + 1 &= a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1\\ &= a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1\\ &= a^3(a^2 + a + 1) - a^2(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)\\ &= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)\end{aligned}$$

Cách 2: Thêm bớt a^2 để làm xuất hiện thừa số chung $(a^2 + a + 1)$. Ta có:

$$\begin{aligned}a^5 + a + 1 &= a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1)\\ &= a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)\end{aligned}$$

25. Thêm bớt a. Đáp số: $(a^2 + a + 1)(a^5 - a^4 + a^2 - a + 1)$

Chú ý: *Các đa thức dạng* $a^{3k+2} + a + 1$ *(như* $a^5 + a + 1$, $a^8 + a + 1$, *...) và* $a^{3k+1} + a^{3m+2} + 1$ *(như* $a^7 + a^2 + 1$, $a^7 + a^5 + 1$, *...) đều phân tích được ra thừa số.*

26. $$\begin{aligned}(1 + x^2)^2 - 4x(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 + 4x^2 - 4x(1 - x^2)\\ &= [(1 - x^2) - 2x]^2 = (x^2 + 2x - 1)^2.\end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned}x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 &= x^4 + 2x^2(3x + 1) + (9x^2 + 6x + 1)\\ &= x^4 + 2x^2(3x + 1) + (3x + 1)^2 = (x^2 + 3x + 1)^2.\end{aligned}$$

28. Với mọi x, ta có $(x + a)(x - 5) + 2 = (x + b)(x + c)$ (1)

Với $x = 5$ thì $2 = (5 + b)(5 + c)$.

Vì b và c nguyên nên $(5+b)(5+c)$ là tích các số nguyên. Số 2 chỉ viết được dưới dạng tích hai số nguyên bằng hai cách là 1.2 và (−1).(−2). Do đó vai trò của b và c như nhau nên chỉ cần xét 2 trường hợp:

1. $\begin{cases} 5+b=1 \\ 5+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4 \\ c=-3 \end{cases}$

Thay vào (1), ta có: $(x+a)(x-5)+2=(x-4)(x-3)$ với mọi x.

Với $x=4$ thì $-(4+a)+2=0$ suy ra $a=-2$.

Đa thức được phân tích thành $(x-2)(x-5)+2=(x-4)(x-3)$.

2. $\begin{cases} 5+b=-1 \\ 5+c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-6 \\ c=-7 \end{cases}$

Thay vào (1), ta có: $(x+a)(x-5)+2=(x-6)(x-7)$ với mọi x.

Với $x=6$ thì $(6+a)+2=0$ suy ra $a=-8$.

Đa thức được phân tích thành $(x-8)(x-5)+2=(x-6)(x-7)$.

29. Giải tương tự bài 28, ta được $m=9,\ m=1$.

Đáp số: $(x+9)(x+5)+3=(x+8)(x+6)$

$(x+1)(x+5)+3=(x+2)(x+4)$.

30. Đa thức trên không chứa nhân tử chung, không có dạng một hằng đẳng thức đáng nhớ nào, cũng không thể nhóm các hạng tử. Ta biến đổi đa thức ấy thành đa thức có nhiều hạng tử hơn.

Cách 1: (Tách hạng tử thứ hai)

$3x^2-8x+4=3x^2-6x-2x+4=3x(x-2)-2(x-2)=(3x-2)(x-2)$.

Cách 2: (Tách hạng tử thứ nhất).

$3x^2-8x+4=4x^2-8x+4-x^2=(2x-2)^2-x^2$

$=(2x-2-x)(2x-2+x)=(3x-2)(x-2)$

Nhận xét: Trong cách 1, hạng tử $-8x$ được tách thành hai hạng tử $-6x$ và $-2x$. Trong đa thức $3x^2-6x-2x+4$, hệ số của các hạng tử là 3, $-6,-2,4$. Các hệ số thứ hai và thứ tư đều gấp -2 lần hệ số liền trước, nhờ đó mà xuất hiện nhân tử chung $x-2$.

31. Các số $\pm1,\ \pm5$ không là nghiệm của đa thức. Như vậy, đa thức không có nghiệm nguyên. Tuy vậy, đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ khác. Ta chứng minh được rằng trong đa thức có các hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất (*).

Xét các số $\pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{5}{3}$, ta thấy $\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức, do đó đa thức chứa thừa số $3x-1$. Ta tách các hạng tử như sau:

$3x^2 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5$
$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2 - 2x + 5)$

32. Thêm và bớt $36x^2$:
$4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2+9)^2 - (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 - 6x)$

33. Thêm và bớt $16x^2y^2$:
$64x^4 + y^4 = 64x^4 + 16x^2y^2 + y^4 - 16x^2y^2 = (8x^2 + y^2)^2 - (4xy)^2$
$= (8x^2 + y^2 + 4xy)(8x^2 + y^2 - 4xy)$

34. ***Cách 1:*** $x^5 + x - 1 = x^5 - x^4 + x^3 + x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1$
$= x^3(x^2 - x + 1) + x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

Cách 2: Thêm và bớt x^2:
$x^5 + x - 1 = x^5 + x^2 - x^2 + x - 1 = x^2(x^3 + 1) - (x^2 - x + 1)$
$= (x^2 - x + 1)[x^2(x+1) - 1] = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

35. Thêm và bớt x: $x^7 + x^2 - 1 = x^7 - x + x^2 + x - 1$
$= x(x^3+1)(x^3-1) + (x^2 + x + 1) = x(x^3+1)(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)$
$= (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

Chú ý: Các đa thức dạng $x^{3m+1} + x^{3m+2} - 1$ như $x^7 + x^2 - 1$, $x^7 + x^5 - 1$,... đều chứa nhân tử $x^2 + x + 1$, $x^5 + x - 1$, $x^8 + x + 1$, ... đều chứa nhân tử $x^2 + x + 1$

36. Các số ± 1, ± 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên, cũng không có nghiệm hữu tỉ. Như vậy, nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì có dạng $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Phép nhân này cho kết quả $x^4 + (a+c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho, ta được hệ điều kiện: $\begin{cases} a + c = -6 \\ ac + b + d = 12 \\ ad + bc = -14 \\ bd = 3 \end{cases}$

Xét $bd = 3$ với $b, d \in Z, b \in \{\pm 1, \pm 3\}$.

Với $b = 3$ thì $d = 1$, hệ điều kiện trên trở thành: $\begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ a + 3c = -14 \end{cases}$

Suy ra $2c = -14 - (-6) = -8$. Do đó: $c = -4,\ a = -2$.

Vậy đa thức đã cho phân tích thành $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

Chú ý: Ta trình bày lời giải của ví dụ trên như sau:
$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 3x^2 - 12x + 3$

$= x^2(x^2 - 4x + 1) - 2x(x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 4x + 1)$

$= (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

37. $M = a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = (a^3 + a^2c) + (b^3 + b^2c) - abc$

$= a^2(a + c) + b^2(b + c) - abc = a^2(-b) + b^2(-a) - abc = -ab(a + b + c) = 0$

38. Đặt $x - y = a,\ y - z = b,\ z - x = c$ thì $a + b + c = 0$.

Do đó theo bài 10 ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$\Rightarrow (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

39. Đặt $x + y = a,\ y + z = b,\ x + z = c$ thì $a + b + c = 2(x + y + z)$. Đa thức đã cho có áp dụng $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

Áp dụng kết quả trên, đa thức đã cho bằng:

$$3(a + b)(b + c)(c + a) = 3(x + 2y + z)(y + 2z + x)(z + 2x + y)$$

40. ***Cách 1:*** Khai triển hai hạng tử cuối rồi nhóm các hạng tử làm xuất hiện nhân tử chung $y - z$.

$P = x^2(y - z) + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2 = x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y^2 - z^2)$

$= (y - z)(x^2 + yz - xy - xz) = (y - z)[x(x - y) - z(x - y)]$

$= (y - z)(x - y)(x - z)$

Cách 2: Tách $z - x$ thành $-[(y - z) + (x - y)]$, ta có:

$P = x^2(y - z) - y^2[(y - z) + (x - y)] + z^2(x - y)$

$= (y - z)(x^2 - y^2) - (x - y)(y^2 - z^2)$

$= (y - z)(x + y)(x - y) - (x - y)(y + z)(y - z)$

$= (y - z)(x - y)(x + y - y - z) = (y - z)(x + y)(x - z)$

41. a. $(a + b)(b + c)(a - c)$

b. $ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + (ca^2 + cb^2 + 2abc)$

$= ab(a + b) + c^2(a + b) + c(a + b)^2$

$= (a + b)(ab + c^2 + ac + bc) = (a + b)(b + c)(c + a)$

c. Viết $b^2 - c^2$ dưới dạng: $-[(a^2 - b^2) + (c^2 - a^2)]$

Đáp số: $(a - b)(b - c)(a - c)$.

d. Tách $c - a$ thành $-[(b - c) + (a - b)]$;

$a^3(b - c) - b^3[(b - c) + (a - b)] + c^3(a - b)$

$= a^3(b - c) - b^3(b - c) - b^3(a - b) + c^3(a - b)$

$= (b - c)(a^3 - b^3) - (a - b)(b^3 - c^3)$.

Đáp số: $(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c)$

e. $(a^2 - b)(b^2 - c)(c^2 - a)$

42. Theo bài 10, ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Do đó nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và a, b, c > 0 thì:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Áp dụng, để giải tiếp.

43. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$

$\Rightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2b^2 - 4abcd + 2c^2d^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$

Bạn đọc tự chứng minh $a = b = c = d$.

44. $am + bc = a(a + b + c) + bc = a(a + b) + ac + bc = (a + b)(a + c)$

Tương tự, $bm + ca = (b + c)(b + a)$, $cm + ab = (c + a)(c + b)$. Suy ra điều phải chứng minh.

45. Do $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ nên

$$ab + cd = ab.1 + cd.1 = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$$

Phân tích đa thức này thành nhân tử được $(bc + ad)(ac + bd)$ bằng 0.

46. ***Cách 1:*** Nếu lấy mẫu chia cho tử thì được đúng 5 lần:

Vậy: $\dfrac{19...9}{99...95} = \dfrac{1}{5}$.

Cách 2: $19 = 20 - 1 = 2.10 - 1$

$199 = 200 - 1 = 2.10^2 - 1$

...

$19..9 = 2.10^n - 1$

$95 = 100 - 5 = 10^{1+1} - 5$

$995 = 1000 - 5 = 10^{2+1} - 5$

...

$9...95 = 10^{n+1} - 5$

Vậy: $\dfrac{19...9}{99...95} = \dfrac{2\left(10^n - \dfrac{1}{2}\right)}{10\left(10^n - \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{5}$.

47. Trước hết phân tích tử và mẫu thành nhân tử:

$a^3 - 4a^2 - a + 4 = a^3 - a - 4a^2 + 4 = a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)$

$= (a^2 - 1)(a - 4) = (a + 1)(a - 1)(a - 4)$

$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = a^3 - 8 - 7a^2 + 14a = a^3 - 2^3 - 7a^2 + 14a$

$= (a - 2)(a^2 + 2a + 4) - 7a(a - 2) = (a - 2)(a^2 - 5a + 4) = (a - 2)(a - 1)(a - 4)$

Vậy: $\dfrac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8}=\dfrac{(a+1)(a-1)(a-4)}{(a-2)(a-1)(a-4)}=\dfrac{a+1}{a-2}$

Tính số trị: $\dfrac{a+1}{a-2}=\dfrac{102+1}{102-2}=\dfrac{103}{100}=1,03$.

48. Theo tính chất cơ bản của phân thức, ta có:

$$\frac{1981-1980}{1981+1980}=\frac{1981-1980}{1981+1980}.\frac{1981+1980}{1980+1981}=\frac{1981^2-1980^2}{(1981+1980)^2}$$

$$=\frac{1981^2-1980^2}{1981^2+2.1981.1980+1980^2}$$

Vậy: $\dfrac{1981-1980}{1981+1980}=\dfrac{1981^2-1980^2}{1981^2+2.1981.1980+1980^2}<\dfrac{1981^2-1980^2}{1981^2+1980^2}$.

49. $\dfrac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1}=\dfrac{(10^{1979}+0,1)+0,9}{10^{1980}+1}=\dfrac{(10^{1979}+0,1)+0,9}{10(10^{1979}+0,1)}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{0,9}{10^{1980}+1}$.

Còn $\dfrac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1}=\dfrac{10^{1980}+0,1+0,9}{10^{1981}+0,1.10}=\dfrac{(10^{1980}+0,1)+0,9}{10(10^{1980}+0,1)}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{0,9}{10^{1981}+1}$.

Bằng cách so sánh 2 phân số có cùng tử số ta có: $\dfrac{0,9}{10^{1980}+1}>\dfrac{0,9}{10^{1981}+1}$

Từ bài toán trên ra có thể ra bài toán tổng quát:

$\dfrac{10^n+1}{10^{n+1}+1}$ *hay* $\dfrac{10^{n+1}+1}{10^{n+2}+1}$ *với n là số tự nhiên?*

50. $2a^2+2b^2=5ab$, suy ra $2a^2-5ab+2b^2=0$ suy ra $(2a-b)(a-2b)=0$.

Vì $b>a>0$ nên $a\neq 2b$. Để thỏa mãn (1) thì $b=2a$.

Vậy: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{a+2a}{a-2a}=\dfrac{3a}{-a}=-3$.

51. Cộng hai vế của $c^2+2(ab-ac-bc)=0$ lần lượt với a^2; b^2 ta có:

$a^2=c^2+2ab-2ac-2bc+a^2=(a-c)^2+2b(a-c)$ (1)

$b^2=c^2+2ab-2ac-2bc+b^2=(b-c)^2+2a(b-c)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra vế trái của đẳng thức phải chứng minh có dạng:

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)^2+2b(a-c)+(a-c)^2}{(b-c)^2+2a(b-c)+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)^2+2b(a-c)}{2(b-c)^2+2a(b-c)}$$

$$=\frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Như vậy, đẳng thức được chứng minh.

52. $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}=\dfrac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$

$$= \frac{x^2(a^2+a+1)+(a^2+a+1)}{x^2(a^2-a+1)+(a^2-a+1)} = \frac{(a^2+a+1)(x^2+1)}{(a^2-a+1)(x^2+1)} = \frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$$

do $x^2+1 \neq 0$.

Điều đó chứng tỏ rằng phân thức đã cho không phụ thuộc vào x.

Xét mẫu $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ cho nên phân thức $\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$ hay $\frac{(x+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x-a)(1-a)+a^2x^2+1}$ có nghĩa với mọi x và a.

53. Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) được:

$$x + y + z = by + cz + ax + cz + ax + by = 2(ax + by + cz)$$

Thay $ax + by = z$ vào vế phải của đẳng thức trên được:

$$x + y + z = 2(z + cz) = 2z(1 + c)$$

Suy ra $\frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}$ với $x + y + z \neq 0$.

Tương tự như vậy, ta được: $\frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$; $\frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$

Cộng các vế tương ứng của ba đẳng thức trên được:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

54. Phân tích thành nhân tử:

$$a^2 + ac - b^2 - bc = a(a+c) - b(b+c) = a(a+b+c) - b(a+b+c)$$

$$= (a-b)(a+b+c).$$

$$b^2 + ab - c^2 - ac = b(b+a) - c(c+a) = b(a+b+c) - c(a+b+c)$$

$$= (b-c)(a+b+c).$$

$$c^2 + bc - a^2 - ab = c(c+b) - a(a+b) = c(a+b+c) - a(a+b+c)$$

$$= (c-a)(a+b+c).$$

Điều kiện: $a + b + c \neq 0$; $a \neq b \neq c \neq a$. Quy đồng các phân thức trên ta được: $\frac{c-a}{MSC} + \frac{a-b}{MSC} + \frac{b-c}{MSC} = 0$.

§3. Phân thức hữu tỉ

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: *Tìm các giá trị thích hợp của các biến trong các phân thức hữu tỉ. Những giá trị thích hợp của biến là những giá trị của biến làm cho mẫu số khác không.*

Dạng 2: *Phân tích phân thức hữu tỉ thành tổng của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất.*

Phương pháp chung :

Bước 1: Tìm các giá trị thích hợp của các biến trong các phân thức hữu tỉ.

Bước 2: Phân tích mẫu thức thành tích các nhị thức bậc nhất.

Bước 3: Biểu diễn phân thức về dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$.

Bước 4: Đồng nhất các hệ số, để tìm A, B.

Bước 5: Kết luận.

Dạng 3: *Tính số trị của phân thức hữu tỉ.*

Phương pháp chung : *Thông thường, với các bài toán về tính giá trị của biểu thức, trước hết ta rút gọn để được một biểu thức đơn giản rồi mới thay chữ bằng số đã cho.*

Bước 1: Tìm các giá trị thích hợp của các biến trong các phân thức hữu tỉ.

Bước 2: Qui đồng các mẫu thức.

Bước 3: Phân tích tử thức thành nhân tử.

Bước 4: Ước lược các nhân tử chung.

Bước 5: Thay giá trị của chữ bằng số đã cho.

Bước 6: Kết luận.

Dạng 4: *Rút gọn các phân thức hữu tỉ.*

Phương pháp chung :

Bước 1: Tìm các giá trị thích hợp của các biến trong các phân thức hữu tỉ.

Bước 2: Qui đồng các mẫu thức.

Bước 3: Phân tích tử thức thành nhân tử.

Bước 4: Ước lược các nhân tử chung.

Bước 5: Kết luận.

Dạng 5: *Chứng minh đẳng thức.*

Phương pháp chung :

Bước 1: Tìm các giá trị thích hợp của các biến trong các phân thức hữu tỉ.

Bước 2: Qui đồng các mẫu thức.

Bước 3: Phân tích tử thức thành nhân tử.

Bước 4: Ước lược các nhân tử chung.

Bước 5: Biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

Bước 6: Kết luận.

Dạng 6. *Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là số nguyên.*
Dạng 7. *Các bài toán tổng hợp.*

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Tìm các giá trị thích hợp của các biến trong các phân thức hữu tỉ

Ví dụ : Cho các phân thức đại số:

a. $\frac{9-4x^2}{36y^2-25}$; b. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

1. Tìm các giá trị thích hợp của các biến.
2. Tìm các giá trị của biến x để phân thức trên bằng 0.

Giải

a. Những giá trị thích hợp của biến là những giá trị của y làm cho:

$36y^2-25 \neq 0 \Leftrightarrow (6y-5)(6y+5) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \pm\frac{5}{6}$

Những giá trị của biến x để phân thức bằng 0 là nghiệm của phương trình

$9-4x^2=0 \Leftrightarrow (3-2x)(3+2x)=0$. Vậy $x=\pm\frac{3}{2}$

b. $x^2+2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Các giá trị thích hợp của biến là $x \neq -1$.

$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=0$ khi và chỉ khi:

$x^2-1=0$ và $x \neq -1$; $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$x=-1$ bị loại, chỉ có $x=1$ là giá trị của biến để phân thức nhận giá trị 0.

Dạng 2: Phân tích phân thức hữu tỉ thành tổng của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất

Ví dụ 1: Phân tích phân thức sau đây: $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$

thành tổng của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất.

Giải

Mẫu thức của phân thức trên đây có thể phân tích thành nhân tử: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Ta tìm hai biểu thức A và B để có:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}.$$

Quy đồng mẫu thức ở vế phải, ta có: $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)}$

Như vậy ta phải có: $2x-1=A(x-2)+B(x-3)$ (*)

Vế trái của (*) là một nhị thức bậc nhất, vậy A, B phải là những hằng số.

Có hai cách để tìm A, B

Cách 1: (*) cho ta: $2x-1=(A+B)x-2A-3B$

Đồng nhất hệ số của các hạng tử cùng bậc ở hai vế ta được: $\begin{cases}A+B=2\\2A+3B=1\end{cases}$

cho ta $A=5,\ B=-3$. Vậy $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}$

Cách 2: Trong (*), cho x = 2 thì $A(x-2)=0$, do đó tính được B; cho x = 3 thì $B(x-3)=0$ và tính được A:

$x=2\Rightarrow 4-1=A.0+B(2-3)\Rightarrow B=-3$

$x=3\Rightarrow 6-1=A(3-2)+B.0\Rightarrow A=5$

Ví dụ 2: Xác định các số a, b, c sao cho: $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{c}{x-1}$ (1)

Giải:

Thực hiện phép cộng ở vế phải của (1):

$$\frac{(ax+b)(x-1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{ax^2-ax+bx-b+cx^2+c}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x+(c-b)}{(x^2+1)(x-1)}$$

Đồng nhất phân thức trên với phân thức $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-1)}$, ta được:

$$\begin{cases}a+c=0\\b-a=0\\c-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c+b=0\\c-b=1\end{cases}\Rightarrow c=\frac{1}{2};\ b=-\frac{1}{2}$$

Do đó $a=-\dfrac{1}{2}$. Như vậy $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}$

Dạng 3: Tính số trị của phân thức hữu tỉ

Ví dụ 1: Cho $4a^2+b^2=5ab$ với $2a>b>0$.

Tính số trị của phân thức: $P=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$

Giải

Từ $4a^2+b^2=5ab$, ta có: $4a^2-4ab-ab+b^2=0$

Hay $(a-b)(4a-b)=0\,(*)$. Vì $2a>b>0$ nên $4a-b\neq 0$

Vậy từ (*) ta suy ra $a-b=0$. Tức là $a=b$.

Thay $a=b$ vào P ta được: $P=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}=\dfrac{a^2}{4a^2-a^2}=\dfrac{1}{3}$ (do $a\neq 0$)

Ví dụ : Tính giá trị biểu thức:

a. $\frac{(a-2)^2(2a+2a^2)}{(a+1)(4a-a^3)}$ với $a=-\frac{1}{2}$

b. $\frac{x-xy+y-y^2}{y^3-3y^2+3y-1}$ với $x=-\frac{3}{4};y=\frac{1}{2}$

Giải

a. $\frac{(a-2)^2(2a+2a^2)}{(a-1)(4a-a^3)}=\frac{2a(a-2)^2(a+1)}{-a(a+1)(a-2)(a+2)}=-\frac{2(a-2)}{a+2}$

Vớ $a=-\frac{1}{2}$ phân thức có giá trị là $\frac{10}{3}$.

b. $\frac{x-xy+y-y^2}{y^3-3y^2+3y-1}=\frac{x(1-y)+y(1-y)}{(y-1)^3}=\frac{(x+y)(1-y)}{(y-1)^3}=-\frac{x+y}{(y-1)^2}$

Vớ $x=-\frac{3}{4},y=\frac{1}{2}$ phân thức có giá trị là 1.

***Nhận xét**: Thông thường, với các bài toán về tính giá trị của biểu thức, trước hết ta rút gọn để được một biểu thức đơn giản rồi mới thay chữ bằng số đã cho.*

Ví dụ : Rút gọn biểu thức rồi tính giá trị:

a. $\frac{ax^2(a-x)-a^2x(x-a)}{3a^2-3x^2}$ với $a=\frac{1}{2};x=-3$

b. $\frac{(ab+bc+cd+da)abcd}{(c+d)(a+b)+(b-c)(a-d)}$ với $a=-3;c=2;b=-4;d=3$

c. $\frac{(x+12a)(x^2-4ax+4a^2)}{(x+5a)^2-49a^2}$ với $a=-\frac{1}{2};x=5$

d. $\frac{(8x^3-y^3)(4x^2-y^2)}{(2x-y)(4x^2-4xy+y^2)}$ với $x=2;y=-\frac{1}{2}$

Giải

a. $A=\frac{ax^2(a-x)-a^2x(x-a)}{3a^2-3x^2}=\frac{ax(a-x)(a+x)}{3(a-x)(a+x)}=\frac{ax}{3}$

Thay $a=\frac{1}{2};x=-3$ ta có $A=-\frac{1}{2}$.

b. $B=\frac{(ab+bc+cd+da)abcd}{(c+d)(a+b)+(b-c)(a-d)}=\frac{[(ab+ad)+(bc+cd)]abcd}{ca+cb+da+db+ba-bd-ca+cd}$

$=\frac{[a(b+d)+c(b+d)]abcd}{ba+da+cb+cd}=\frac{(b+d)(a+c)abcd}{(b+d)(a+c)}=abcd$

Thay $a=-3;c=2;b=-4;d=3$ ta có $B=72$.

c. $C=\dfrac{(x+12a)(x-2a)^2}{(x+5a)^2-(7a)^2}=\dfrac{(x+12a)(x-2a)(x-2a)}{(x+5a+7a)(x+5a-7a)}=x-2a$

Thay $a=-\dfrac{1}{2}; x=5$ ta có $C=6$.

d. $D=\dfrac{(8x^3-y^3)(4x^2-y^2)}{(2x+y)(4x^2-4xy+y^2)}$

$=\dfrac{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(2x-y)(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)(2x-y)}=4x^2+2xy+y^2$

Thay $x=2; y=-\dfrac{1}{2}$ ta có $D=14\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức sau, biết rằng $a+b+c=0$:

$$A=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)$$

Giải:

Gọi $M=\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}$, ta có:

$M.\dfrac{c}{a-b}=1+\dfrac{c}{a-b}\left(\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right)=1+\dfrac{c}{a-b}.\dfrac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}$

$=1+\dfrac{c}{a-b}.\dfrac{(a-b)(c-a-b)}{ab}=1+\dfrac{2c^2}{ab}=1+\dfrac{2c^3}{abc}$

Tương tự: $M.\dfrac{a}{b-c}=1+\dfrac{2a^3}{abc}$, $M.\dfrac{b}{c-a}=1+\dfrac{2b^3}{abc}$.

Vậy $A=3+\dfrac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=9$ (vì $a^3+b^3+c^3=3abc$, xem bài 42)

Ví dụ 5: Cho $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=a$.

Tính giá trị của biểu thức: $M=\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right):\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)$ theo a.

Giải:

Trước hết, tính x^4 theo a. Ta có:

$\dfrac{x^4-1}{x^4+1}=a\Rightarrow x^4-1=ax^4+a\Rightarrow x^4-ax^4=a+1\Rightarrow x^4=\dfrac{a+1}{1-a}$ (do $a\neq 1$).

Thay vào M và rút gọn được $M=\dfrac{2a}{a^2+1}$

Ví dụ 6: Cho các số a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức: $M=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

Giải:

Ta có $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b+b+c+c+a}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

Nếu $a+b+c\neq 0$ thì tỉ số trên bằng 2. Suy ra $a+b=2c$, $b+c=2a$, do đó $a-c=2(c-a)$ nên $c=a$, trái với đề bài.

Vậy $a+b+c=0$. Ta có $M=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$.

Ví dụ 7: Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$. Tính giá trị của các biểu thức: $N=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Giải:

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

Do $a^3+b^3+c^3=3abc$ và $a+b+c\neq 0$ nên $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$

Dễ dàng suy ra $a=b=c$. Vậy $N=\frac{3a^2}{(3a)^2}=\frac{1}{3}$.

Dạng 4: Rút gọn các phân thức hữu tỉ

Ví dụ 1: Rút gọn các phân thức:

a. $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$

b. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

Giải

a. $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c}=a+b-c$

b. $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}=\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2+2ac+c^2-b^2}$

$=\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)}=\frac{a+b-c}{a-b+c}$

Ví dụ 2: Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)}+\frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)}+\frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$

Giải

$a^2+ac-b^2-bc=(a^2-b^2)+c(a-b)=(a-b)(a+b+c)$

Vậy mẫu thức của phân thức thứ nhất là: $(b-c)(a-b)(a+b+c)$

Chú ý rằng, nếu trong mẫu thức của phân thức thứ nhất, ta thay b bởi c, thay c bởi a và thay a bởi b thì ta được mẫu thức của phân thức thứ hai. Do vậy: Mẫu thức của phân thức thứ hai bằng: $(c-a)(b-c)(a+b+c)$.

Mẫu thức của phân thức thứ ba bằng: $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Đáp số: 0

Ví dụ 3: Cho a, b, c khác nhau đôi một và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Rút gọn các biểu thức:

a. $M=\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$

b. $N=\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ac}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}$

c. $P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$.

Giải:

Từ giả thiết suy ra $ab+bc+ac=0$ nên

$a^2+2bc=a^2+bc+(-ab-ac)=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2+2ac=(b-a)(b-c)$; $c^2+2ab=(c-a)(c-b)$

a. $M=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{b-c+c-a+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0$

b. $N=\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$

c. $P=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$

Ví dụ 4: Rút gọn phân thức: $A=\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$

Giải:

Phân tích mẫu thức thành nhân tử:

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)$

$=(b-c)\left[a(a-b)-c(a-b)\right]=(b-c)(a-c)(a-b)$.

Do đó: $A=\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$.

Ta có nhận xét: Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Đặt $b - c = x,\ c - a = y,\ a - b = z$ thì $x + y + z = 0$.

Theo nhận xét trên: $A = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{-xyz} = \dfrac{3xyz}{-xyz} = -3$.

Ví dụ : Cho biết $ax + by + cz = 0$.

Rút gọn: $A = \dfrac{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$

Giải:

Ta có $B = bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2$

$= bcy^2 + bcz^2 + caz^2 + cax^2 + abx^2 + aby^2 - 2(bcyz + acxz + abxy)\ (1)$

Từ giả thiết suy ra: $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(bcyz + acxz + abxy) = 0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$B = ax^2(b+c) + by^2(a+c) + cz^2(a+b) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$

$= ax^2(a+b+c) + by^2(a+b+c) + cz^2(a+b+c) = (a+b+c)(ax^2 + by^2 + cz^2)$

Do đó: $A = \dfrac{B}{ax^2 + by^2 + cz^2} = a + b + c$.

Dạng 5: Chứng minh đẳng thức.

Ví dụ : Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\dfrac{3y}{4} = \dfrac{6xy}{8x}\ (x \neq 0)$ b. $\dfrac{x+y}{3a} = \dfrac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)}$ với $a \neq 0, x \neq -y$.

Giải

a. Vì $x \neq 0$ thì $2x \neq 0$.

Theo tính chất của phân thức, ta có: $\dfrac{3y}{4} = \dfrac{3y.2x}{4.2x} = \dfrac{6xy}{8x}$

b. Vì $a \neq 0$ và $x \neq -y$ thì ta có $3a(x+y) \neq 0$.

Vậy $\dfrac{x+y}{3a} = \dfrac{(x+y).3a(x+y)}{3a.3a(x+y)} = \dfrac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)}$

Ví dụ : Cho $x > y > 0$. Chứng minh rằng : $\dfrac{x-y}{x+y} < \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Giải

Do $x > y > 0$ nên $x + y \neq 0$.

Theo tính chất cơ bản của phân thức ta có:

$\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}\ (1)$.

Mặt khác, do $x, y > 0$ nên $x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + y^2$

Vậy $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} < \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra: $\dfrac{x - y}{x + y} < \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Ví dụ 3: Chứng minh đẳng thức: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Giải

Cách 1: Xuất phát từ vế phải và quy đồng mẫu thức, ta có:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Cách 2: Xuất phát từ vế trái và áp dụng phương pháp hệ số bất định, ta được: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1}$ hay $1 = A(n+1) + Bn$, cho ta $A = 1,\ B = -1$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu:

$c^2 + 2(ab - ac - bc) = 0, b \neq c, a + b \neq c$ thì $\dfrac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \dfrac{a-c}{b-c}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1982)

Giải

Vì $c^2 + 2(ab - ac - bc) = 0$ nên

$$\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a^2 + (a-c)^2 + (c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)}{b^2 + (b-c)^2 + (c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)}$$

$$= \frac{2a^2 + 2c^2 - 4ac + 2ab - 2bc}{2b^2 + 2c^2 - 4bc + 2ab - 2ac} = \frac{(a-c)^2 + b(a-c)}{(b-c)^2 + a(b-c)}$$

$$= \frac{(a-c)(a-c+b)}{(b-c)(b-c+a)} = \frac{a-c}{b-c} \quad (b \neq c, a+b \neq 0)$$

Ví dụ 5: Cho đẳng thức: $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$ (1)

Chứng minh rằng ba phân thức vế trái thì có hai phân thức bằng + 1, và một phân thức bằng -1.

Giải:

Đặt $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = A, \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = B, \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = C$.

Theo giả thiết: $A + B + C = 1$. Suy ra: $S = (A-1) + (B-1) + (C+1) = 0$

$$A - 1 = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}; B - 1 = \frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}$$

$$C + 1 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$

$$S=\frac{a+b-c}{2abc}\left[c(a+b+c)+b(a-c-b)+a(b-c-a)\right]$$

$$S=0\Rightarrow(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=0$$

Cóba khả năng:

a. $a+b-c=0\Rightarrow A-1=B-1=C+1=0$ (đpcm)

b. $b+c-a=0$. Ta xét: $A+1=B-1=C-1=0$ (đpcm).

c. $c+a-b=0$. Ta xét : $S=(A-1)+(B+1)+(C-1)=0$, và suy ra $A-1=B+1=C-1=0$ (đpcm)

Ví dụ 6: Giả sử $x=\frac{a-b}{a+b};y=\frac{b-c}{b+c};z=\frac{c-a}{c+a}$

Chứng minh rằng $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)(1)$

Giải

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}=1\ (2)$$

Thay $x=\frac{a-b}{a+b}$ vào $\frac{1+x}{1-x}$, ta được: $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$

Hoán vị vòng $x\to y\to z\to x$ và $a\to b\to c\to a$, được: $\frac{1+y}{1-y}=\frac{b}{c};\frac{1+z}{1-z}=\frac{c}{a}$.

Thay vào (2) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)}$$
$$+\frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)}+\frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)}$$
$$=\frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

Giải:

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}=\frac{(a+b+c+d-x)+(x-a)}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}$$
$$=\frac{(a+b+c+d-x)}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

Áp dụng hoán vị vòng $b\to c\to d\to a\to b$ vào vế trái rồi đơn giản, ta

được: $(a+b+c+d-x)\left[\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)}\right.$

$$+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)}$$

$$\left.+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x)}\right]$$. Quy đồng mẫu thức và tính toán biểu thức trong [ ] ta được: $\frac{-1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$

Từ đây suy ra đpcm.

Ví dụ 8: Cho biết: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ và $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$

Chứng minh rằng $a+b+c=abc$.

Giải:

Từ (1) suy ra: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=4$

Do (2) nên $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=1$, suy ra $\frac{a+b+c}{abc}=1$.

Do đó $a+b+c=abc$

Ví dụ 9: Cho $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ và a, b, c khác 0. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$.

Giải

Từ giả thiết suy ra: $ab+bc+ac=0$.

Do đó $\frac{ab+bc+ac}{abc}=0$, tức là $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Sau đó chứng minh rằng nếu $x+y+z=0$ thì: $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Ví dụ 10: Cho $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c tồn tại hai số giống nhau.

Giải:

Từ giả thiết suy ra:

$a^2c+ab^2+bc^2=b^2c+a^2b+ac^2 \Rightarrow a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0$

$\Rightarrow (c-b)(a^2-ac-ab+bc)=0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c)=0$

Tồn tại một trong các thừa số $c-b$, $a-b$, $a-c$ bằng 0. Do đó trong ba số a,b, c tồn tại hai số giống nhau.

Dạng 6: Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là số nguyên

Ví dụ : Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của các biểu thức sauđây cũng là số nguyên:

a. $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1}$ b. $\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x - 2}$

Giải

a. Chia tử thức cho mẫu thức, được thương là x^2 và dư là 2.

$P(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1} = x^2 + \frac{2}{x - 1}$. Khi cho x một giá trị nguyên thì x^2 là một số nguyên, do đó P(x) nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{2}{x - 1}$ nhận giátrị nguyên, hay $x - 1$ là một ước số của 2, nghĩa là $x - 1 = \pm 1; \pm 2$. Ta có: $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0) = -2;\ x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow P(2) = 6$

$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 0;\ x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow P(3) = 10$

b. $x = -2; 0, 1; 3; 4; 6.$

Dạng 7: Các bài toán tổng hợp

Ví dụ : Chứng minh rằng nếu $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ac)(a - abc)$ và các số a, b, c, $a - b$ khác 0 thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$.

Giải

Từgiả thiết suy ra:

$$a^2b - a^3bc - b^2c + ab^2c^2 = ab^2 - ab^3c - a^2c + a^2bc^2$$

$$\Rightarrow ab(a - b) + c(a^2 - b^2) = abc^2(a - b) + abc(a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow (a - b)(ab + bc + ac) = abc(a - b)(a + b + c)$$

Chia hai vế cho $abc(a - b) \neq 0$,ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ : Tính tổng: $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Giải

Cách 1: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{n+2}$

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Cách 2: $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$2S=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+...+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$ suy ra $S=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Ví dụ 3: Tính tổng: $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Giải

Ta có: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

Ta được: $\frac{1}{1.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{3.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$; $\frac{1}{5.7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. Vậy $S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

Ví dụ 4: Cho các số a,b,c khác 0 và đôi một khác nhau, thoả mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính : $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003-2004

Giải:

Tacó $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow a+b+c=0$ (do a,b,c đôi một khác nhau). Suy ra

$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=\frac{a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-2(a^3+b^3+c^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Mặt khác : $\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}$

$=\frac{-bc\left[(a-b)+(c-a)\right]+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$

Vậy $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$.

Bài tập vận dụng

1. Tìm giá trị của x để phân thức sau bằng 0.

a. $\dfrac{2x^2+10x+12}{x^3-4x}$; b. $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-5}$.

2. Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{a^4-3a^2+1}{a^4-a^2-2a-1}$.

3. Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}$.

4. Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$ với $x<0$.

5. Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{16a^2-40ab}{8a^2-24ab}$ với $\dfrac{a}{b}=\dfrac{10}{3}$.

6. Rút gọn phân thức sau: $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}$.

7. Tìm giá trị của x để phân thức $\dfrac{2x^2+10x+12}{x^3-4x}$ bằng 0.

8. Rút gọn phân thức sau:

$$M=a+\frac{2a+b}{2-b}-\frac{2a-b}{2+b}+\frac{4a}{b^2-4} \text{ với } b=\frac{a}{a+1}.$$

9. Rút gọn phân thức sau:

$$N=\left(1+\frac{1}{a+x}\right):\left(1-\frac{1}{a+x}\right).\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]. \text{ Với } x=\frac{1}{a-1}$$

10. Cho $3a^2+3b^2=10ab$ và $b>a>0$. Tìm số trị biểu thức: $P=\dfrac{a-b}{a+b}$.

11. Cho $4a^2+b^2=5ab$ và $2a>b>0$. Tìm số trị biểu thức: $M=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$.

12. Cho $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$. Tính số trị biểu thức: $N=\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ca}{b^2}+\dfrac{ab}{c^2}$.

13. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ với a, b, c $\neq 0$.

Tính số trị biểu thức: $P=\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$.

14. Tìm các số a và b sao cho phân thức $\dfrac{x^2+5}{x^3-3x-2}$ viết được thành $\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$.

15. Viết phân thức $\frac{10x-4}{x^3-4x}$ dưới dạng tổng ba phân thức mà mẫu số theo thứ tự bằng x, $x+2$, $x-2$, tử số là các hằng số.

16. Xác định các số a, b, c sao cho: $\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}$ đồng nhất với $\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$.

17. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau.

18. Cho $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1$.

a.Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có một số bằng tổng hai số kia.

b.Chứng minh rằng trong ba phân thức đã cho, có một phân thức bằng -1, hai phân thức còn lại bằng 1.

19. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)(x^{32}-x^{16}+1)$$
$$=\frac{x^{64}+x^{32}+1}{x^2+x+1}.$$

20. Cho $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\neq 0$. Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)}{(ax+by+cz)^2}$.

21. Cho $a+b+c=1$ (1); $a^2+b^2+c^2=1$ (2); $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (3).

Chứng minh rằng: $xy+yz+zx=0$.

22. Cho $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}$, trong đó a, b, c, $2b+2c-a$, $2c+2a-b$, $2a+2b-c\neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}.$$

23. Chứng minh rằng nếu ta có đẳng thức:

$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2=d(x-y)^2$ trong đó $a,b,c\neq 0$, đúng với mọi x và y thì: $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

24. Rút gọn biểu thức với n là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2:

$$\frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}.\frac{4^2-1}{4^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}$$

25. Rút gọn biểu thức với n là số tự nhiên:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right).\left(1+\frac{1}{8}\right).\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right).$$

26. Rút gọn biểu thức với n là số tự nhiên:

$$\left(1+\frac{2}{4}\right).\left(1+\frac{2}{10}\right).\left(1+\frac{2}{18}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right).$$

27. Chứng minh hằng đẳng thức sau với n là số tự nhiên:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{n-1}{n}\qquad(n\geq 2)$$

28. Chứng minh hằng đẳng thức sau với n là số tự nhiên:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

29. Chứng minh hằng đẳng thức sau với n là số tự nhiên:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}\qquad(n\geq 2).$$

30. Rút gọn biểu thức:

$$\frac{1}{a^2-a}+\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}+\frac{1}{a^2+9a+20}$$

31. Tìm số tự nhiên n để phân thức: $\dfrac{n^4-2n^3+5}{n-2}$ có số trị là số nguyên.

32. Rút gọn $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}$, biết rằng $x+y+z=0$.

33. Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x-y}{x+y}$, biết $x^2-2y^2=xy\,(y\neq 0;\ x+y\neq 0)$

34. Tính giá trị của phân thức $A=\dfrac{3x-2y}{3x+2y}$, biết rằng $9x^2+4y^2=20xy$ và $2y-3x<0$.

35. Cho $3x-y=3z$ và $2x+y=7z$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x^2-2xy}{x^2+y^2}$ $(x\neq 0;\ y\neq 0)$.

36. Tìm số nguyên x để phân thức sau có giá trị là số nguyên:

a) $\frac{3}{2x-1}$ b) $\frac{5}{x^2+1}$ c) $\frac{7}{x^2-x+1}$

d) $\frac{x^2-59}{x+8}$ e) $\frac{x+2}{x^2+4}$

37. Tìm số hữu tỉ x để phân thức $\frac{10}{x^2+1}$ có giá trị nguyên.

38. Cho $a+b+c=0$ và a, b, c đều khác 0. Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{ab}{a^2+b^2-c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2-b^2}.$$

39. Cho a, b, c là các số nguyên khác nhau đôi một. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị là một số nguyên:

$$P=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

40. Cho $3y-x=6$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{x}{y-2}+\frac{2x-3y}{x-6}$

41. Tìm x, y, z biết rằng: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=\frac{x^2+y^2+z^2}{5}$

42. Tìm x, y biết rằng: $x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$

43. Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là số nguyên:

a. $A=\frac{2x^3-6x^2+x-8}{x-3}$ b. $B=\frac{x^4-2x^3-3x^2+8x-1}{x^2-2x+1}$

c. $C=\frac{x^4+3x^3+2x^2+6x-2}{x^2+2}$

44. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$:

a. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$.

45. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$:

$$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}$$

46. Chứng minh rằng với số tự nhiên $n\ge 3$: $B=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ \dots\ +\frac{1}{n^3}<\frac{1}{12}$

Hướng dẫn và đáp số .

1. a) Phân thức bằng 0 khi tử số bằng 0 và mẫu số khác 0. Tử số bằng $2x^2+10x+12=2\left(x^2+5x+6\right)=2(x+2)(x+3)$ bằng 0 khi $x=-2$ hoặc $x=-3$. Với $x=-2$ thì mẫu số $x^3-4x=-8+8=0$.

Với $x=-3$ thì mẫu số $x^3-4x=-27+12\neq 0$.

Vậy phân thức bằng 0 khi và chỉ khi $x=-3$.

Chú ý: Cũng có thể phân tích mẫu số ra thừa số $x(x+2)(x-2)$ rồi nhận xét với $x=-2$ thì mẫu số bằng 0, với $x=-3$ thì mẫu số khác 0.

b) Đáp số: $x=\pm 1$.

2. Tử số $a^4-2a^2+1-a^2=\left(a^2-1\right)^2-a^2=\left(a^2-1+a\right)\left(a^2-1-a\right)$. Mẫu số $a^4-\left(a^2+2a+1\right)=a^4-(a+1)^2=\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a-1\right)$.

Phân thức bằng $\dfrac{a^2+a-1}{a^2+a+1}$ với điều kiện $a^2-a-1\neq 0$.

3. Phân tích ra thừa số, tử số bằng $(a-b)(b-c)(a-c)$, mẫu số bằng $\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)$.

Phân tích rút gọn thành $\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ với a, b, c khác nhau.

4. Cần nhớ lại định nghĩa giá trị tuyệt đối của một số:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

Như vậy khi bỏ dấu giá trị tuyệt đối của một đa thức, ta thay đa thức bằng chính nó hoặc bằng đa thức đối của nó. Đa thức đối của $a-b$ là $-a+b$ (hay $b-a$), đa thức đối của $a+b$ là $-a-b$ (đừng nhầm là $a-b$).

Với $x<0$ thì $x-1<0$ nên $|x-1|=1-x$; $|x|=-x$.

Do đó $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}=\dfrac{1-x-x+x}{(x+1)(3x-1)}=\dfrac{1}{1-3x}$.

5. $\dfrac{16a^2-40ab}{8a^2-24ab}=\dfrac{8a(2a-5b)}{8a(a-3b)}=\dfrac{2a-5b}{a-3b}$

Chia tử số và mẫu số cho $b\neq 0$ ta được $\dfrac{2.\dfrac{a}{b}-5}{\dfrac{a}{b}-3}=\dfrac{2.\dfrac{10}{3}-5}{\dfrac{10}{3}-3}=5$.

Chú ý: Cũng có thể thay $a=\dfrac{10}{3}b$ vào phân thức $\dfrac{2a-5b}{a-3b}$.

6. Không nên quy đồng mẫu số tất cả các phân thức. Nên cộng hai phân thức đầu, rồi lấy kết quả cộng tiếp với phân thức thứ ba. Cuối cùng ta được $\dfrac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$.

7. Phân thức bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0.

Vì tử bằng $2x^2+10x+12=2(x^2+5x+6)=2(x+2)(x+3)$ nên tử bằng 0 khi $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Với $x=-2$ thì mẫu: $x^3-4x=(-2)^3-4.(-2)=-8+8=0$ (loại)

Với $x=-3$ thì mẫu: $x^3-4x=(-3)^3-4.(-3)=-27+12=-15\neq 0$

Vậy phân thức bằng 0 khi và chỉ khi $x=-3$.

Chú ý: cũng có thể phân tích mẫu thành nhân tử $x(x+2)(x-2)$ rồi nhận xét với $x=-2$ thì mẫu bằng 0, với $x=-3$ thì mẫu khác 0.

8. Cộng ba phân thức sau, ta được: $\dfrac{4ab+4b-4a}{4-b^2}=\dfrac{4b(a+1)-4a}{4-b^2}$.

Thay $b=\dfrac{a}{a+1}$ vào, ta được $\dfrac{4a-4a}{4-b^2}=0$.

Vậy $M=a$ với điều kiện $b\neq\pm 2;\ a\neq -1$

9. Rút gọn biểu thức N, ta được $\dfrac{(a+x+1)^2}{2ax}$ rồi thay $x=\dfrac{1}{a-1}$ vào kết quả trên. Đáp số: $\dfrac{a^3}{2(a-1)}$ với điều kiện $a\neq 0;\ a\neq 1$ (khi đó các điều kiện $x\neq 0;\ a+x\neq 0;\ a+x\neq 1$ được thỏa mãn).

10. ***Cách 1:*** Cần biến đổi biểu thức P để sử dụng được điều kiện $3a^2+3b^2=10ab$.

Do đó ta xét biểu thức: $P^2=\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}$.

Từ điều kiện $3a^2+3b^2=10ab$, ta suy ra $a^2+b^2=\dfrac{10}{3}ab$.

Do đó $P^2=\dfrac{\dfrac{10}{3}ab-2ab}{\dfrac{10}{3}ab+2ab}=\dfrac{\dfrac{4}{3}ab}{\dfrac{16}{3}ab}=\dfrac{1}{4}$ (vì $ab\neq 0$).

Do $b>a>0$ nên $a-b<0;\ a+b>0$, suy ra $P<0$. Vậy $P=-\dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Từ $3a^2+3b^2=10ab$, suy ra: $3a^2-9ab-ab+3b^2=0$

$\Leftrightarrow 3a(a-3b)-b(a-3b)=0 \Leftrightarrow (a-3b)(3a-b)=0$

Trường hợp $a-3b=0 \Leftrightarrow a=3b$ không xảy ra vì $0<a<b<3b$.

Trường hợp $3a-b=0 \Leftrightarrow b=3a$, thay vào P, ta có:

$$\frac{a-b}{a-b}=\frac{a-3a}{a+3a}=\frac{-2a}{4a}=-\frac{1}{2} \quad (\text{do } a \neq 0)$$

11. Xét M^2, ta được $M^2=\frac{1}{9}$ mà $M>0$ nên $M=\frac{1}{3}$. Giải tương tự như bài trên.

12. Chú ý rằng nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Thật vậy: $x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$.

Do đó: $x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y)=3xyz$

(Nhận xét này cũng có thể suy ra ngay từ kết quả của bài trên)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

Áp dụng nhận xét trên, ta có:

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ thì $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=\frac{3}{abc}$.

Do đó: $N=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{abc}{a^3}+\frac{abc}{b^3}+\frac{abc}{c^3}$

$$=abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=abc.\frac{3}{abc}=3 \text{ với } a,\ b,\ c \neq 0.$$

13. Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

Do $a^3+b^3+c^3=3abc$ nên $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0$. Do

đó $\left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0 \end{array}\right.$

- Nếu $a+b+c=0$ thì do $a,\ b,\ c \neq 0$, ta có:

$$P=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{a}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$$

- Nếu $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$ thì ta suy ra:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$$

Điều này chỉ xảy ra khi $a-b=0;\ b-c=0;\ a-c=0 \Leftrightarrow a=b=c$. Khi đó $P=(1+1)(1+1)(1+1)=8$.

Vậy $P=-1$ hoặc $P=8$.

14. ***Cách 1:*** (phương pháp hệ số bất định)

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+(a-2b)}{x^3-3x-2}$$

Đồng nhất với phân thức $\frac{x^2+5}{x^3-3x-2}$ ta có: $\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\a-2b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$

Vậy: $\frac{x^2+5}{x^3-3x-2}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x+1)^2}$.

Cách 2: (phương pháp trị số riêng)

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}.$$

Đồng nhất với phân thức $\frac{x^2+5}{x^3-3x-2}$, ta có với mọi x:

$$a(x+1)^2+b(x-2)=x^2+5 \quad (1)$$

Với $x=-1$ thì $-3b=6 \Rightarrow b=-2$.

Với $x=2$ thì $9a=9 \Rightarrow a=1$.

Chú ý: Mặc dù với $x=-1$; $x=2$ phân thức không có nghĩa nhưng do (1) đúng với mọi x nên để xác định a và b ở (1) ta có thể cho $x=-1$; $x=2$.

15. Đáp số: $\frac{10x-4}{x^3-4x}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}$.

16. Đáp số: $\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2-x+1}$.

17. Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$, do đó $(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc=0$ (1). Để chứng minh trong 3 số a, b, c có hai số đối nhau, ta sẽ chứng minh $(a+b)(b+c)(a+c)=0$. Hãy phân tích vế trái của (1) ra thừa số.

18. a. Để chứng tỏ trong 3 số a, b, c có một số bằng tổng hai số kia, ta sẽ chứng minh $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=0$. Từ giả thiết, ta có: $(a^2+b^2-c^2)c+(b^2+c^2-a^2)a+(c^2+a^2-b^2)b=2abc$.

Thêm bớt 2abc, ta có:

$$(a^2+b^2-c^2+2ab)c+(b^2+c^2-a^2-2bc)a+(c^2+a^2-b^2-2ac)b=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)c+(b-c+a)(b-c-a)a+(c-a+b)(c-a-b)b=0$$

Đặt (a + b − c) làm thừa số chung ở vế trái:

$(a+b-c)(c^2-a^2+2ab-c^2)=0 \Leftrightarrow (a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)=0$

Nếu $a+b-c=0$ thì $c=a+b$.

Nếu $c+a-b=0$ thì $b=a+c$.

Nếu $c-a+b=0$ thì $a=b+c$.

b. Trường hợp $c=a+b$, ta có:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-a^2-2ab-b^2}{2ab}=\frac{-2ab}{2ab}=-1$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+a^2+2ab+b^2-a^2}{2b(a+b)}=\frac{2b(a+b)}{2b(a+b)}=1$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-b^2}{2a(a+b)}=\frac{2a(a+b)}{2a(a+b)}=1$$

Tương tự với 2 trường hợp còn lại.

19. Do $x^2+x+1=x^2+2.x.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$, ta nhân vế trái của hằng đẳng thức với x^2+x+1, và chú ý rằng:

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x^2+1)^2-x^2=x^4+x^2+1$.

20. Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k\neq 0$ thì $x=ak;\ y=bk;\ z=ck$.

Do đó: $\frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)}{(ax+by+cz)^2}$

$$=\frac{(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)(a^2+b^2+c^2)}{(a^2k+b^2k+c^2k)^2}=\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)^2}{k^2(a^2+b^2+c^2)^2}=1.$$

21. Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ thì $x=ak;\ y=bk;\ z=ck$.

Khi đó $xy+yz+zx=abk^2+ack^2+bck^2=k^2(ab+ac+bc)$ (4)

Từ (1) ta có: $(a+b+c)^2=1$ hay $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$.

Do (2) nên $2ab+2ac+2bc=0$ tức là $ab+ac+bc=0$.

Thay vào (4) được $xy+yz+zx=0$.

22. Đặt $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}=k$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$k=\frac{4z+4x-2y}{2b}=\frac{4x+4y-2z}{2c}=\frac{-2y-2z+x}{-a}=\frac{9x}{2a+2c-a}$$

Tương tự (do hoán vị vòng quanh) $k=\frac{9y}{2c+2a-b}$; $k=\frac{9z}{2a+2b-c}$

Vậy: $\dfrac{x}{2b+2c-a}=\dfrac{y}{2c+2a-b}=\dfrac{z}{2a+2b-c}$.

23. Vì đẳng thức đúng với mọi x, y nên lần lượt cho $x=1;\ y=0$ và $x=0;\ y=1$ vào đẳng thức.

24. $\dfrac{2^2-1}{2^2}.\dfrac{3^2-1}{3^2}.\dfrac{4^2-1}{4^2}\ldots\dfrac{n^2-1}{n^2}=\dfrac{1.3}{2^2}.\dfrac{2.4}{3^2}.\dfrac{3.5}{4^2}\ldots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\dfrac{1.2.3\ldots(n-1)}{2.3.4\ldots(n-1)n}.\dfrac{3.4.5\ldots n(n+1)}{2.3.4\ldots n}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{n+1}{2n}$.

25. Xét $1+\dfrac{1}{n^2+2n}=\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Đáp số $\left(1+\dfrac{1}{3}\right).\left(1+\dfrac{1}{8}\right).\left(1+\dfrac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)=\dfrac{2(n+1)}{n+2}$.

26. Xét $1+\dfrac{2}{n^2+3n}=\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$.

Đáp số: $\left(1+\dfrac{2}{4}\right).\left(1+\dfrac{2}{10}\right).\left(1+\dfrac{2}{18}\right)\ldots\left(1+\dfrac{2}{n^2+3n}\right)=\dfrac{3(n+1)}{n+3}$.

27. Không thể quy đồng mẫu số các phân số ở vế trái. Cần tách mỗi phân số thành hiệu 2 phân số. Nhận xét: $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{(n-1)n}$.

Do đó: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}$

$=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$.

28. Nhận xét $\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Đặt $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}=S$

Trước hết, tính 2S được $\dfrac{2n}{2n+1}$. Từ đó suy ra $S=\dfrac{n}{2n+1}$.

29. Cần tách mỗi phân số ở vế trái thành hiệu 2 phân số để xuất hiện trong biểu thức những số hạng đối nhau. Nhưng đó là hiệu 2 phân số nào?

Hãy xét các hiệu: $\dfrac{1}{1.2}-\dfrac{1}{2.3};\ \dfrac{1}{2.3}-\dfrac{1}{3.4};\ \ldots$

Tổng quát $\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Gọi vế trái của đẳng thức cần chứng minh là S.

Do $\dfrac{1}{(n-1)n}-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)}$ nên

$$2S=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\ldots+\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{2n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}.$$

Vậy: $S=\dfrac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$.

30. Phân tích các mẫu số ra thừa số lần lượt được $a(a+1)$; $(a+1)(a+2)$; $(a+2)(a+3)$; $(a+3)(a+4)$; $(a+4)(a+5)$. Tách mỗi phân thức thành hiệu hai phân thức.

Đáp số: $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+5}=\dfrac{5}{a(a+5)}$.

31. Biến đổi: $\dfrac{n^4-2n^3+5}{n-2}=\dfrac{n^3(n-2)+5}{n-2}=n^3+\dfrac{5}{n-2}$

Muốn biểu thức có số trị nguyên thì $n-2$ phải là ước số của 5.

Đáp số: 1; 3; 7.

32. Đáp số: $\dfrac{1}{3}$

33. $x^2-xy-2y^2=0 \Leftrightarrow x^2+xy-2xy+2y^2=0$

$\Leftrightarrow x(x+y)-2y(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0$

Do $x+y\neq 0$ nên $x=2y$. Do đó: $A=\dfrac{2y-y}{2y+y}=\dfrac{y}{3y}=\dfrac{1}{3}$.

34. $A^2=\dfrac{9x^2+4y^2-12xy}{9x^2+4y^2+12xy}=\dfrac{20xy-12xy}{20xy+12xy}=\dfrac{8xy}{32xy}=\dfrac{1}{4}$

Do $2y<3x<0 \Rightarrow 3x-2y>0,\ 3x+2y<0 \Rightarrow A<0$. Vậy $A=-\dfrac{1}{2}$.

35. Tính x và y theo z, được $x=2z,\ y=3z$. Thay các giá trị của x và y vào biểu thức M và rút gọn được $M=-\dfrac{8}{13}$

36. a) $x \in \{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ b) $x \in \{-2;\ 0;\ 2\}$

c) $x \in \{-2;\ 0;\ 1;\ 3\}$

d) Đáp số: $x \in \{-13;\ -9;\ -7;\ -3\}$.

e) $(x+2) \vdots (x^2+4) \Rightarrow (x+2)(x-2) \vdots (x^2+4) \Rightarrow (x^2+4-8) \vdots (x^2+4)$

$\Rightarrow\ 8 \vdots (x^2+4)$

Xét x^2+4 bằng 4, bằng 8 rồi thử lại, ta được $x=-2$ thỏa mãn bài toán.

37. Đặt $\dfrac{10}{x^2+1} = k \in Z$, ta có $kx^2 + k = 10$ nên $x^2 = \dfrac{10-k}{k}$.

Ta phải có $\dfrac{10-k}{k} \ge 0$ nên $0 < k \le 10$. Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 = \dfrac{10-k}{k}$	9	4	$\dfrac{7}{3}$	$\dfrac{3}{2}$	1	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$	0
$x \in Q$	± 3	± 2			± 1			$\pm\dfrac{1}{2}$	$\pm\dfrac{1}{3}$	0

38. Từ $a+b+c=0$ suy ra $a+b=-c$.

Bình phương hai vế, ta được $a^2+b^2+2ab=c^2$ nên $a^2+b^2-c^2=-2ab$.

Tương tự, $b^2+c^2-a^2=-2bc$ và $c^2+a^2-b^2=-2ac$.

Do đó: $A = \dfrac{ab}{-2ab} + \dfrac{bc}{-2bc} + \dfrac{ca}{-2ca} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

39. $P = \dfrac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

Phân tích tử thành nhân tử được $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

Vậy $P = a+b+c$

40. $A = \dfrac{3y-6}{y-2} + \dfrac{2x-(x+6)}{x-6} = 3+1 = 4$

41. Từ $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}$ suy ra $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{5}\right) + \left(\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{y^2}{5}\right) + \left(\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^2}{5}\right) = 0$

Nên $\dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{2}{15}y^2 + \dfrac{1}{20}z^2 = 0$. Do đó $x=y=z=0$.

42. $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) = 4 \Rightarrow \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\right) + \left(y^2 + \dfrac{1}{y^2} - 2\right) = 0$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{x} \\ y = \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Có bốn đáp số:

x	1	1	−1	−1
y	1	−1	1	−1

43. a) $A = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x-3}$; $x \in \{-2,\ 2,\ 4,\ 8\}$

b) $x \in \{0,\ 2\}$

c) $x \in \{0\}$

44. a) $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ ...\ + \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ ...\ \frac{1}{n^2}\right)$

$$< \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ ...\ + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}$$

b) $B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ ...\ + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \ ...\ + \frac{1}{(2n+1)^2-1}$

$$= \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \ ...\ + \frac{1}{2n(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ ...\ + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) < \frac{1}{4}$$

45. Nhận xét: $\frac{1}{n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

Do đó: $A < 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ ...\ + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{2}{3}$

46. Ta thấy: $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2}.\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)n(n+1)}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Do đó:

$$B < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \ ...\ + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] < \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

§4. Phương trình dạng ax + b = 0

Các kiến thức cơ bản

Trước hết ta nhớ lại những định nghĩa cơ bản:

1. *Cho phương trình* $f(x)=g(x)$. *Nghiệm của phương trình xét trên tập A là số* $\alpha \in A$ *sao cho* $f(\alpha)=g(\alpha)$. *Chẳng hạn phương trình* $2x^2-x-1=0$ *xét trên tập Z có một nghiệm* $x=1$, *xét trên tập Q, R có thêm nghiệm* $x=-\frac{1}{2}$.

   Giải phương trình $f(x)=g(x)$ *là tìm mọi giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức f(x) và g(x) bằng nhau.*

   Tập hợp các giá trị đó gọi là tập nghiệm của phương trình đã cho, và thường được kí hiệu là S.

2. *Hai phương trình (1) và (2) gọi là tương đương trên tập số A nếu tập nghiệm của (1) và (2) như nhau trong A (kể cả trường hợp (1) và (2) cùng vô nghiệm trong A). Chẳng hạn: phương trình* $x^2-1=0$ *và phương trình* $2x^2-x-1=0$ *là tương đương trên* Z^+, *nhưng không tương đương trên Q, R.*

3. *Các phép biến đổi phương trình mà không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là các phép biến đổi tương đương. Chẳng hạn các phép biến đổi sau đây:*

   a) $f(x)=g(x)+h(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=h(x)$.

   b) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+c=g(x)+c$.

   c) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2k+1}=[g(x)]^{2k+1}$; $k\in N$.

   d) $f(x)=g(x)$ *(với* $f(x)\geq 0$; $g(x)\geq 0$*)*

   $\Leftrightarrow [f(x)]^{2k}=[g(x)]^{2k}$; $k\in N$

   Sau này trong từng loại phương trình, ta sẽ đề cập thêm nhiều phép biến đổi tương đương khác.

4. *Các phép biến đổi phương trình mà làm mở rộng thêm tập nghiệm gọi là các phép biến đổi hệ quả.*

   Chẳng hạn: $x=\sqrt{2x+3} \Rightarrow x^2=2x+3$. *Khi sử dụng các phép biến đổi hệ quả phải chú ý đặt thêm điều kiện để phép biến đổi trở thành tương đương hoặc phải kiểm tra các nghiệm của phương trình hệ quả để phát hiện ra các nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu (nghiệm ngoại lai).*

5. *Khi giải một phương trình, ta có thể:*
- *Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.*
- *Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.*

Khi đó phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

** Ta thấy rằng: việc giải phương trình (tìm tất cả các nghiệm của nó) phụ thuộc vào việc qui định ẩn lấy các giá trị trên tập hợp nào. Trong phạm vi lớp 8, khi không có ghi chú gì, thì ta hiểu rằng ta đang giải phương trình trên tập Q các số hữu tỉ. Trong trường hợp khác, ta sẽ nói rõ, thí dụ: tìm nghiệm nguyên của phương trình (Giải phương trình trên tập hợp Z).*

6. *Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.*

Khi giải phương trình có hệ số chữ trong mục này, ta cũng xét các phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó $a = 0$.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: *Giải phương trình.*

Dạng 2: *Phương trình chứa ẩn số ở mẫu thức*

Cách giải:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Qui đồng mẫu số, biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm.

Dạng 3: *Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối*

Nguyên tắc để xét phương trình, bất phương trình loại này là phải khử được dấu trị tuyệt đối.

Cách giải:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Khử dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai trên.

Bước4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

Dạng 4: *Phương trình có chứa tham số*

Dạng 5: *Phương trình bậc cao*

Để giải các phương trình bậc cao, thông thường người ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau.

1. Phương pháp đưa về dạng tích. Để sử dụng được phương pháp này, các bạn cần luyện lại phương pháp phân tích đa thức thành tích của các thừa số. Nhiều trường hợp đòi hỏi các bạn phải biết cách thêm, bớt các số hạng cần thiết để đạt được mục đích.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ.

Dạng 6: *Các bài toán khác*

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Giải phương trình

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a. $\dfrac{2x-\dfrac{4-3x}{5}}{15}=\dfrac{7x-\dfrac{x-3}{2}}{5}-x+1 \qquad (1)$

b. $x-\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{3+x}{4}}{2}=\dfrac{2x-\dfrac{10-7x}{3}}{2}-(x-1) \qquad (2)$

c. $\dfrac{3}{10}(1,2-x)-\dfrac{5+7x}{4}=\dfrac{1}{20}(9x+0,2)-\dfrac{12,5x+4,5}{5} \qquad (3)$

Giải

a. $(1)\Leftrightarrow \dfrac{10x-(4-3x)}{5.15}=\dfrac{14x-(x-3)}{2.5}-x+1$

$\Leftrightarrow \dfrac{13x-4}{75}=\dfrac{13x+3}{10}-x+1 \Leftrightarrow \dfrac{13x-4}{75}=\dfrac{13x+3-10x+10}{10}$

$\Leftrightarrow 2(13x-4)=15(3x+13)\Leftrightarrow x=-\dfrac{203}{19}$

b. $(2)\Leftrightarrow \dfrac{8x-2x+3+x}{8}=\dfrac{13x-10}{6}-(x-1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{7x+3}{8}=\dfrac{7x-4}{6}\Leftrightarrow 3(7x+3)=4(7x-4)\Leftrightarrow x=\dfrac{25}{7}$

c. $(3)\Leftrightarrow \dfrac{7,2-6x-5(5+7x)}{20}=\dfrac{9x+0,2}{20}-\dfrac{4(12,5x+4,5)}{20}$

$\Leftrightarrow -41x-17,8=-41x-17,8\Leftrightarrow 0.x=0$.

Phương trình có nghiệm x tùy ý.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\dfrac{x+1}{65}+\dfrac{x+3}{63}=\dfrac{x+5}{61}+\dfrac{x+7}{59}$

Giải

Nhận xét rằng: trong các phân thức trên nếu cộng tử thức với mẫu số thì các tử thức đều trở thành $x+66$, cho nên ta cộng 1 vào cả bốn phân thức: $\left(\dfrac{x+1}{65}+1\right)+\left(\dfrac{x+3}{63}+1\right)=\left(\dfrac{x+5}{61}+1\right)+\left(\dfrac{x+7}{59}+1\right)$

$\dfrac{x+66}{65}+\dfrac{x+66}{63}=\dfrac{x+66}{61}+\dfrac{x+66}{59}\Leftrightarrow (x+66)\left(\dfrac{1}{65}+\dfrac{1}{63}-\dfrac{1}{61}-\dfrac{1}{59}\right)=0$

Do $\dfrac{1}{65}+\dfrac{1}{63}-\dfrac{1}{61}-\dfrac{1}{59}\neq 0$ nên $x+66=0\Rightarrow x=-66$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a. $\frac{x-5}{100}+\frac{x-4}{101}+\frac{x-3}{102}=\frac{x-100}{5}+\frac{x-101}{4}+\frac{x-102}{3}$;

b. $\frac{29-x}{21}+\frac{27-x}{23}+\frac{25-x}{25}+\frac{23-x}{27}+\frac{21-x}{29}=-5.$

Giải

a. Trừ 1 vào mỗi phân thức, ta được:

$$\frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x-105)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=105.$$

b. Cộng 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, cộng 5 vào vế phải, ta được:

$(50-x)\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}\right)=0.$ Vậy $x = 50$.

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn số ở mẫu thức

Cách giải:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Qui đồng mẫu số, biến đổi đưa về phương trình bậc hai.

Bước 3: Giải phương trình bậc hai trên.

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\frac{x}{2(x-3)}+\frac{x}{2(x+1)}=\frac{2x}{(x+1)(x-3)}$ (1)

Giải

1. Điều kiện để các mẫu thức khác 0: $x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3; x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$
2. Mẫu thức chung: $2(x+1)(x-3)$

   Quy đồng mẫu thức và rút gọn ta đưa về phương trình: $2x(x-3)=0$ (2)

   Phương trình (2) có 2 nghiệm $x_1=0, x_2=3$

   So với điều kiện để các mẫu thức khác 0 thì nghiệm $x_2=3$ bị loại.

   Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của các biến thì các biểu thức sau đây vô nghĩa:

$$\frac{3x^2-1}{\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x}} \quad (1)$$

Giải:

a. Để biểu thức vô nghĩa, ta phải có: $x-2=0; x-3=0;$ hoặc $x=0$.

   Rút gọn biểu thức (1) về dạng $\frac{x(x-2)(x-3)(3x^2-1)}{-2x-6}$

   Phải có thêm điều kiện $-2x-6=0 \Rightarrow x=-3$

   Các giá trị của biến làm cho biểu thức vô nghĩa là: $-3;0;2;3$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\frac{x+4}{2x^2-5x+2}+\frac{x+1}{2x^2-7x+3}=\frac{2x+5}{2x^2-7x+3}$ (1)

Giải

Thực hiện các phép biến đổi tương đương, ta đưa (1) về dạng:

$$\frac{x+4}{2x^2-5x+2}-\frac{x+4}{2x^2-7x+3}=0 \Leftrightarrow (x+4)\left(\frac{1}{2x^2-5x+2}-\frac{1}{2x^2-7x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)(1-2x)}{(2x^2-5x+2)(2x^2-7x+3)}=0 \Leftrightarrow (x+4)(1-2x)=0 \Leftrightarrow x=-4 \text{ hoặc } x=\frac{1}{2}.$$

Thử vào mẫu thức:

Với $x=\frac{1}{2}$ thì $2x^2-5x+2=0$

Với $x=-4$ thì $(2x^2-5x+2)(2x^2-7x+3)\neq 0$

Kết luận: phương trình (1) đã cho có nghiệm duy nhất là $x=-4$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+3}{x-4}=\frac{2}{(x-2)(4-x)}$ (1)

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\neq 2, x\neq 4$.

Biến đổi phương trình (1): $(x-1)(x-4)+(x+3)(x-2)=-2$.

Thu gọn phương trình, ta được $2x(x-2)=0$

Nghiệm của (2) là $x_1=0; x_2=2$.

$x_1=0$ thỏa mãn điều kiện xác định $x_2=2$ không thỏa mãn điều kiện xác định.

Kết luận: $S=\{0\}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+11x+28}+\frac{1}{x^2+17x+70}=\frac{3}{4x-2}$$

Giải:

Điều kiện $x\notin\left\{-10;-7;-4;-1;\frac{1}{2}\right\}$

Với điều kiện trên thì phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+10)}=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{4}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$

$\Leftrightarrow x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-4$. So sánh với điều kiện ta có phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Ví dụ 6: Giải phương trình $\frac{1}{2008x+1}-\frac{1}{2009x+2}=\frac{1}{2010x+4}-\frac{1}{2011x+5}$

Giải

Điều kiện $x \notin \left\{-\frac{1}{2008};-\frac{2}{2009};-\frac{4}{2010};-\frac{5}{2011}\right\}$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2008x+1}+\frac{1}{2011x+5}=\frac{1}{2009x+2}+\frac{1}{2010x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)}=\frac{4019x+6}{(2009x+2)(2010x+4)} \Leftrightarrow 4019x+6=0$$

Hoặc: $\frac{1}{(2008x+1)(2011x+5)}=\frac{1}{(2009x+2)(2010x+4)}$

$\Leftrightarrow 4019x+6=0$ hoặc

$(2008x+1)(2011x+5)-(2009x+2)(2010x+4)=0$

$$\Leftrightarrow 4019x+6=0 \text{ hoặc } 2x^2+5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{6}{4019} \\ x=-1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Kết luận: phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-\frac{6}{4019}; x=-1; x=-\frac{3}{2}$

Ví dụ 7:: Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2-5x+2}+\frac{13x}{3x^2+x+2}=6$

Giải:

Điều kiện $x \notin \left\{1;\frac{2}{3}\right\}$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với $2x(3x^2+x+2)+13x(3x^2-5x+2)=6(3x^2-5x+2)(3x^2+x+2)$

$\Leftrightarrow 54x^4-117x^3+105x^2-78x+24=0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)(9x^2-3x+6)=0$

Kết luận: phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{4}{3}$.

Ví dụ 8:: Giải phương trình: $\frac{2}{3x^2-4x+1}+\frac{13}{3x^2+2x+1}=\frac{6}{x}$

Giải:

Điều kiện $x \neq 0, x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{3}$.

Biến đổi phương trình đã cho thành: $\frac{2}{3x-4+\frac{1}{x}} + \frac{13}{3x+2+\frac{1}{x}} = 6$.

Đặt $3x + \frac{1}{x} - 4 = t$, phương trình trên trở thành

$\frac{2}{t} + \frac{13}{t+6} = 6 \Leftrightarrow 2t^2 + 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = -4$.

* Với $t = \frac{1}{2}$, ta có $3x + \frac{1}{x} - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{12}$

* Với $t = -4$, ta có: $3x + \frac{1}{x} - 4 = -4 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 0$

Phương trình này không có nghiệm thực.

Kết luận: phương trình có hai nghiệm $x = \frac{4}{3}$ và $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1}$

Giải:

Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq \pm\frac{1}{4}$.

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$3(4x+1) = 2(1-4x) + (8+6x) \Leftrightarrow 14x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $\frac{3}{5x-1} + \frac{2}{3-5x} = \frac{4}{(1-5x)(5x-3)}$

Giải:

Điều kiện xác định là $x \neq \frac{1}{5}$; $x \neq \frac{3}{5}$. Với điều kiện đó, ta có phương trình tương đương: $3(3-5x) + 2(5x-1) = 4 \Leftrightarrow 9 - 15x + 10x - 2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow -5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$. Giá trị $x = \frac{3}{5}$ không thỏa mãn điều kiện của phương trình. Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm.

Dạng 3 Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Iguyên tắc để xét phương trình, bất phương trình loại này là phải hủ được dấu giá trị tuyệt đối.

Cách giải:

Bướ 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bướ 2: Khử dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đưa về phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai .

Bướ 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình bậc hai trên.

Bướ 4: So sánh với điều kiện và kết luận nghiệm

Ở đây các bạn cần lưu ý các phép biến đổi cơ bản:

1) $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ a = \pm b \end{cases}$ *2)* $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

Ví dụ 1: Chứng minh rằng các phương trình sau đây có vô số nghiệm số:

a. $3(x-1) - 2x = x - 3$ b. $|x| = x$

Giải

a. Ta biến đổi đồng nhất vế trái của phương trình được:

$$3(x-1) - 2x = 3x - 3 - 2x = x - 3$$

Hai vế của phương trình là hai biểu thức bằng nhau với mọi giá trị của x (cùng là $x - 3$), phương trình được nghiệm với mọi giá trị của x.

b. Theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối: $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x \le 0 \end{cases}$

Phương trình $|x| = x$ được nghiệm với mọi giá trị $x \ge 0$.

* Hai phương trình trên đây đều có vô số nghiệm, nhưng tập hợp nghiệm khác nhau. Ta nói:

Phương trình $3(x-1) - 2x = x - 3$ có nghiệm là x tùy ý (mọi x)

Phương trình $|x| = x$ có nghiệm là x tùy ý ≥ 0 (mọi $x \ge 0$)

Ví dụ 2: Giải phương trình: $2|x| - |x+1| = 2$

Giải

Ta có: $|x| = \begin{cases} x\,(x \ge 0) \\ -x\,(x < 0) \end{cases}$ và $|x+1| = \begin{cases} x + 1\,(x \ge -1) \\ -x - 1\,(x < -1) \end{cases}$

Ta lập bảng sau:

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
$2\|x\|$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$\|x+1\|$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$2\|x\|-\|x+1\|$	$-2x+(x+1)$	$-2x-(x+1)$	$2x-(x+1)$

Do đó, ta viết được: $2|x|-|x+1|=\left[\begin{array}{l}-2x+x+1\,(x<-1)\\ -2x-x-1\,(-1\le x<0)\\ 2x-x-1\,(x\ge 0)\end{array}\right.$

Ta phải giải các phương trình trong từng khoảng như sau:

1. Với $x<-1$: $-2x+x+1=2 \Leftrightarrow x=-1$ (loại)
2. Với $-1\le x<0$: $-2x-x-1=2 \Leftrightarrow x=-1$
3. Với $x\ge 0$: $2x-x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là -1 và 3.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $|x+1|+3|x-1|=x+2+|x|+2|x-2|$

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp II – Toàn quốc – 1979)

Giải

Các nhị thức trong dấu giá trị tuyệt đối có nghiệm là $-1, 1, 0, 2$. Do đó ta xét phương trình trong các khoảng: $x<-1; -1\le x<0; 0\le x<1; 1\le x<2; x\ge 2$

Với $x<-1$ thì: $|x+1|=-(x+1); |x-1|=-(x-1); |x|=-x; |x-2|=-(x-2)$

Và ta có phương trình $-(x+1)-3(x-1)=x+2-x-2(x-2) \Leftrightarrow x=-2$

Với $-1\le x<0$, có phương trình:

$(x+1)-3(x-1)=x+2-x-2(x-2) \Leftrightarrow 0x=2$ (vô nghiệm)

Với $0\le x<1$, có phương trình: $x+1-3(x-1)=x+2+x-2(x-2)$

$\Leftrightarrow x=-1$ (loại).

Với $1\le x<2$, có phương trình: $x+1+3(x+1)=x+2+x-2(x-2)$

$\Leftrightarrow x=2$ (loại).

Với $x\ge 2$, có phương trình: $x+1+3(x-1)=x+2+x+2(x-2)$

$\Leftrightarrow 0x=0$

Đáp số: $x=-2$ hoặc $x\ge 2$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x+\dfrac{2a|x+a|}{x}=\dfrac{a^2}{x}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+2a|x+a|-a^2=0$ với $x\ne 0$.

$|x+a|=\begin{cases}x+a & (x\ge -a)\\ -(x+a) & (x<-a)\end{cases}$

1. Với $x<-a$: $x^2-2a(x+a)-a^2=0$ với $x\ne 0$.

$\Leftrightarrow x^2-2ax-3a^2=0 \Leftrightarrow (x+a)(x-3a)=0$ với $x\ne 0$.

$x = 3a < -a \Leftrightarrow x = 3a$ với $a < 0$.

2. Với $x \geq -a$: $x^2 + 2a(x + a) - a^2 = 0$ với $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -a$

Tóm lại: $a = 0$: Vô nghiệm

$a > 0$: một nghiệm $x = -a$.

$a < 0$: hai nghiệm $x_1 = -a$ và $x_2 = 3a$.

Ví dụ 5 Giải phương trình: $|x - 3| + |x + 2| = 7$

Giải:

a) Trong khoảng $x < -2$, phương trình có dạng: $3 - x - x - 2 = 7 \Leftrightarrow x = -3$ (thuộc khoảng đang xét).

b) Trong khoảng $-2 \leq x < 3$, phương trình có dạng: $3 - x + x + 2 = 7 \Leftrightarrow 0x = 2$ (vô nghiệm).

c) Trong khoảng $x \geq 3$, phương trình có dạng: $x - 3 + x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 4$ (thuộc khoảng đang xét).

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = -3$; $x_2 = 4$.

Ví dụ 6 Giải phương trình: $|x - 4| + |x - 9| = 5$

Giải:

Cách 1. a) Trong khoảng $x < 4$, phương trình có dạng: $4 - x + 9 - x = 5 \Leftrightarrow x = 4$, không thuộc khoảng đang xét.

b) Trong khoảng $4 \leq x \leq 9$, phương trình có dạng: $x - 4 + 9 - x = 5 \Leftrightarrow 0x = 0$, nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét, tức là $4 \leq x \leq 9$.

c) Trong khoảng $x > 9$, phương trình có dạng: $x - 4 + x - 9 = 5 \Leftrightarrow x = 9$, không thuộc khoảng đang xét.

Vậy nghiệm của phương trình là $4 \leq x \leq 9$.

Cách 2. Viết phương trình dưới dạng $|x - 4| + |9 - x| = 5$.

Chú ý rằng $|A| \geq A$ nên $|x - 4| + |9 - x| \geq x - 4 + 9 - x = 5$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x - 4 \geq 0$ và $9 - x \geq 0$, tức là $4 \leq x \leq 9$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $4 \leq x \leq 9$.

Dạng 4: Phương trình có chứa tham số

Ví dụ 1. Giải phương trình sau, với a là hằng (ta còn gọi a là tham số):

$$a(ax + 1) = x(a + 2) + 2.$$

Giải:

Biến đổi phương trình đã cho thành: $a^2x - ax - 2x = 2 - a$

$\Leftrightarrow x(a^2 - a - 2) = 2 - a \Leftrightarrow (a + 1)(a - 2)x = 2 - a$ (1).

Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình đã cho, ta có:

Nếu $a \neq -1, a \neq 2$ thì $S = \left\{-\dfrac{1}{a+1}\right\}$

Nếu $a = -1$ thì (1) có dạng $0x = 3$, vô nghiệm, $S = \varnothing$.

Nếu $a = 2$ thì (1) có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x, $S = R$.

Ví dụ 2: Giải phương trình với a là tham số: $\dfrac{x-a}{3} = \dfrac{x+3}{a} - 2$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $a \neq 0$.

Biến đổi phương trình: $(1) \Leftrightarrow a(x-a) = 3(x+3) - 6a$

$\Leftrightarrow ax - a^2 = 3x + 9 - 6a \Leftrightarrow ax - 3x = a^2 - 6a + 9 \Leftrightarrow (a-3)x = (a-3)^2$. (2).

Nếu $a \neq 3$, phương trình có nghiệm $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng: $0x = 0$, mọi x đều là nghiệm.

Kết luận:

Nếu $a \neq 0$ và $a \neq 3$ thì (1) có một nghiệm: $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = 0$ thì (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng tồn tại các hằng số a, b, c để phương trình sau có vô số nghiệm: $\dfrac{x-ab}{a+b} + \dfrac{x-ac}{a+c} + \dfrac{x-bc}{b+c} = a+b+c$ (1)

Giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $a+b \neq 0; a+c \neq 0; b+c \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-ab}{a+b} - c\right) + \left(\frac{x-ac}{a+c} - b\right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-ac-ab-bc}{a+c} + \frac{x-bc-ab-ac}{b+c} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) = 0$$

(1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c} = 0$. (2)

Chẳng hạn ta chọn $a = 1$, $b = 1$. Để (2) xảy ra ta chọn c sao cho:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+c} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{1+c} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = -5.$$

Như vậy (1) có vô số nghiệm, chẳng hạn khi a = 1, b = 1, c = -5.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\dfrac{x-a}{a+b} + \dfrac{x-b}{a-b} = \dfrac{2ab}{b^2-a^2}$ (a và b là hằng).

Giải:

Điều kiện xác định của phương trình: $a \neq \pm b$.

Biến đổi phương trình: $(x-a)(a-b)+(x-b)(a+b)=-2ab$

$\Leftrightarrow ax-bx-a^2+ab+ax+bx-ab-b^2=-2ab$

$\Leftrightarrow 2ax=a^2+b^2-2ab \Leftrightarrow 2ax=(a-b)^2$ (1)

Nếu $a \neq 0$ thì $x=\dfrac{(a-b)^2}{2a}$.

Nếu $a=0$ thì (1) có dạng $0x=b^2$. Do $a \neq b$ nên $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Nếu $a \neq 0, a \neq \pm b$ thì $S=\left\{\dfrac{(a-b)^2}{2a}\right\}$

Còn lại, $S=\varnothing$.

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình: $(m^2-9)x=m^2+3m$ (m là tham số)

Giải

1. Với $m^2-9 \neq 0$ tức $m \neq \pm 3$: phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{m^2+3m}{m^2-9}=\frac{m}{m-3}$$

2. a. Với m = 3, phương trình có dạng 0.x = 18 (vô nghiệm)
   b. Với $m=-3$ phương trình có dạng: 0.x = 0 (thỏa mãn với mọi x).

Ví dụ 6: Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{mx-8}{x-2m}=0\,(*)$, m là tham số.

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} mx-8=0 & (1) \\ x-2m \neq 0 & (2) \end{cases}$$

a. $m \neq 0$ thì (1) cho $x=\dfrac{8}{m}$.

Thay vào (2): $\dfrac{8}{m}-2m \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4-m^2}{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Vậy phương trình (*) đã cho có nghiệm $x=\dfrac{8}{m}$, khi $m \neq 0, m \neq \pm 2$

b. $m=0$ hoặc $m=\pm 2$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\dfrac{6b+7a}{6b}-\dfrac{3ax}{2b^2}=1-\dfrac{ax}{b^2-ab}$

Với những điều kiện nào thì phương trình có nghiệm số?

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp 2 – miền Bắc – 1966)

Giải

- Điều kiện có nghĩa của phương trình $b \neq 0, a \neq b$
- Mẫu thức chung: $6b^2(b-a)$

- Đưa phương trình về dạng: $3a(3a-b)x = 7ab(a-b)$

Với điều kiện $a \neq 0$ và $a \neq \dfrac{b}{3}$ thì phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{7b(a-b)}{3(3a-b)}$

Ví dụ 8: Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}$

Giải

Điều kiện $x \neq \pm 1$. Đưa phương trình về dạng: $(a+b-1)x = a+b+1$

a. Với $a+b=1$ phương trình vô nghiệm.

b. Với $a+b \neq 1$: $x = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$. So sánh với điều kiện $x \neq \pm 1$

$\dfrac{a+b+1}{a+b-1}$ luôn $\neq 1$ vì $a+b+1 \neq a+b-1$

$\dfrac{a+b+1}{a+b-1} \neq -1 \Leftrightarrow a+b+1 \neq -(a+b-1) \Leftrightarrow a+b \neq 0$

Kết quả cuối cùng:

- Nếu $a+b \neq 1$ và $a+b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$

- Nếu $a+b=1$ hoặc $a+b=0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $x - a^2x - \dfrac{b^2}{b^2-x^2} + a = \dfrac{x^2}{x^2-b^2}$

(Đề thi học sinh giỏi miền Bắc - 1975)

Giải

Điều kiện $x \neq \pm b$. Tiến hành các phép biến đổi đưa phương trình về dạng: $(x^2-b^2)\left[(1-a)-(1-a^2)x\right] = 0$ (1). Với $x \neq \pm b$ thì:

$(1) \Leftrightarrow (1-a)(1+a)x = 1-a$

* Nếu $a=1$ thì $0.x=0$. Phương trình có nghiệm là mọi $x \neq \pm b$.

* Nếu $a=-1$ thì $0.x=2$: phương trình vô nghiệm.

* Nếu $a \neq \pm 1$: phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{1+a}$ với điều kiện $\dfrac{1}{1+a} \neq \pm b$.

Ví dụ 10: Giải và biện luận phương trình: $\dfrac{x+1}{x+2+m} = \dfrac{x-1}{x+2-m}$

Giải

Điều kiện: $x \neq \pm m - 2$. Phương trình có dạng: $(m-1)x = 2$

* Với $m \neq 1$: thì $x = \dfrac{2}{m-1}$.

Phải so sánh giá trị $\dfrac{2}{m-1}$ với $m-2$ và $-m-2$

Giả sử $\frac{2}{m-1} = m - 2 \Leftrightarrow (m-2)(m-1) = 2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$

$\frac{2}{m-1} = -m - 2 \Leftrightarrow (-m-2)(m-1) = 2 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$

* n = 1 thì phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq 0$, $m \neq -1$ và $m \neq 3$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{m-1}$

- Với m = 0 hoặc m = – 1 hoặc m = 3 thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình với các tham số a, b, c:

a. $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3;$

b. $\frac{2a+b+c-3x}{a} + \frac{a+2b+c-3x}{b} + \frac{a+b+2c-3x}{c} = 6 - \frac{9x}{a+b+c}$

Giải

a. Trừ vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải:

$$\frac{x-a-b-c}{b+c} + \frac{x-b-c-a}{a+c} + \frac{x-c-a-b}{a+b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) = 0.$$

Nếu $A = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \neq 0$, phương trình có một nghiệm $x = a + b + c$.

Nếu A = 0, phương trình có tập nghiệm là R.

b. Trừ vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải rồi rút gọn được:

$$\frac{a+b+c-3x}{a} + \frac{a+b+c-3x}{b} + \frac{a+b+c-3x}{c} = \frac{3(a+b+c)-9x}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-3x)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c}\right) = 0.$$

Đặt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c} = A$, nếu $A \neq 0$ thì $x = \frac{a+b+c}{3}$, nếu A = 0 thì phương trình có vô số nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình với các tham số a, b: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$

Giải:

Điều kiện có nghĩa của phương trình: $a \neq 0; b \neq 0; x \neq 0; x \neq -a - b$.

Biến đổi phương trình

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+b+x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{-x(a+b+x)} = \dfrac{a+b}{ab},$

Nếu a + b = 0 thì (1) có vô số nghiệm: x bất kì khác 0.

Nếu $a + b \ne 0$ thì: $-x(a+b+x) = ab \Leftrightarrow ab + ax + bx + x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \\ x = -b \end{array}\right.$$

Để –a thỏa mãn điều kiện có nghĩa của phương trình, ta phải có:

$\begin{cases} -a \ne 0 \\ -a \ne -a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ b \ne 0 \end{cases}$. Các điều kiện này đã có.

Để –b thỏa mãn điều kiện có nghĩa của phương trình, tương tự ta phải có: $a \ne 0, b \ne 0$.

Kết luận:

Nếu $a \ne 0, b \ne 0$; $a + b = 0$ thì (1) có vô số nghiệm: x bất kì khác 0

Nếu $a \ne 0, b \ne 0$; $a + b \ne 0$ thì (1) có nghiệm $x = -a$ và $x = -b$.

Ví dụ 13: Giải phương trình: $\dfrac{x+a}{x+3} + \dfrac{x-3}{x-a} = 2$ (a là hằng).

Giải:

Điều kiện có nghĩa của phương trình là $x \ne -3, x \ne a$. (1)

Biến đổi phương trình: $(x+a)(x-a) + (x-3)(x+3) = 2(x+3)(x-a)$.

Thu gọn phương trình, ta được: $2(a-3)x = (a-3)^2$. (2)

a. Nếu $a \ne 3$ thì $x = \dfrac{a-3}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu: $\dfrac{a-3}{2} \ne -3$ (3) và $\dfrac{a-3}{2} \ne a$ (4). Giải điều kiện (3), ta được $a \ne -3$.

Giải điều kiện (4), ta cũng được $a \ne -3$.

Vậy nếu $a \ne \pm 3$ thì $x = \dfrac{a-3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b. Nếu a = 3 thì (2) có dạng 0x = 0, nghiệm đúng với mọi x thỏa mín điều kiện (1), tức là $x \ne -3$ và $x \ne a$ (do a = 3 nên điều kiện này là $x \ne 3$)..

Kết luận:

Nếu $a \ne \pm 3$ thì $S = \left\{\dfrac{a-3}{2}\right\}$.

Nếu $a = 3$ thì $S = \{x \mid x \ne \pm 3\}$.

Nếu $a = -3$ thì $S = \varnothing$.

Dạng5: Phương trình bậc cao

Để giải các phương trình bậc cao, thông thường người ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau

1. Phương pháp đưa về dạng tích. Để sử dụng được phương pháp này, các bạn cần luyện lại phương pháp phân tích đa thức thành tích của các thừa số. Nhiều trường hợp đòi hỏi các bạn phải biết cách thêm, bớt các sốhạng cần thiết để đạt được mục đích.

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ.

1. Phương pháp đưa về dạng tích.

Ví dụ1: Giải phương trình: $(x^3 - x^2) - 4x^2 + 8x - 4 = 0$.

Giải

$$x^3 - x^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 4(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ví dụ2: Giải phương trình:

a. $x(2x-7) - (4x-14) = 0$; b. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$.

Giải

a. $x(2x-7) - (4x-14) = 0$

$$\Leftrightarrow x(2x-7) - 2(2x-7) = 0 \Leftrightarrow (2x-7)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

b. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) + (2x+3) = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(x^2+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Ví dụ3: Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$.

Giải:

Viết phương trình dưới dạng: $x^4 - (2x-3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 2x - 3][x^2 - 2x + 3] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Ví dụ4: Giải phương trình: $(2x+1)(x-3)(x+7) = 0$

Giải

$$(2x+1)(x-3)(x+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \\ x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \\ x+7=0 \Leftrightarrow x=-7 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x=-\frac{1}{2}$, $x=3$, $x=-7$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^2-4x+3=0$

Giải

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x=1, x=3$.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$

Giải

Phân tích thành nhân tử, ta được:

$$x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x^2+x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{array}\right. ;\ x^2+x+6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+5\frac{3}{4}\neq 0 \text{ với mọi x.}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x_1=-2; x_2=1$

2. Phương pháp đặt ẩn số phụ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4-4x^3+8x-5=0$

Giải:

$x^4-4x^3+8x-5=0 \Leftrightarrow (x^4-4x^3+4x^2)-4x^2+8x-5=0$.

$\Leftrightarrow (x^2-2x)^2-4(x^2-2x)-5=0$. Đặt $x^2-2x=t$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-4t-5=0$. Giải phương trình này ta có $t_1=-1$; $t_2=5$.

Khi $t_1=-1$, ta có $x^2-2x=-1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Khi $t_2=5$, ta có $x^2-2x=5 \Leftrightarrow x^2-2x-5=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$, $x=1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0$.

Giải:

Đây là phương trình dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ $(a\neq 0)$

Ta thấy: $x = 0$ không phải là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta có phương trình tương đương: $2x^2 - 5x + 6 - 5.\frac{1}{x} + 2.\frac{1}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$. Đặt $X = x + \frac{1}{x}$ (điều kiện: $|X| \geq 2$).

Ta có phương trình tương đương:

$$2\left(X^2 - 2\right) - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 2 \\ X = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Do $|X| \geq 2$ nên chỉ lấy giá trị $X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Chú ý: *Phương trình trên cũng có thể đưa về dạng tích.*

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$.

Giải:

Đặt $x + 4 = y$, phương trình trở thành: $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 2$.

Sau khi biến đổi, ta được: $y^2\left(y^2 + 6\right) = 0$, do đó $y = 0$. Vậy: $x = -4$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Giải:

Phương trình trên là phương trình đối xứng (chú ý các hệ số có tính đối xứng). Trong phương trình đối xứng, nếu a là nghiệm thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm.

Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng có một trong các nghiệm là $x = -1$. Phương trình đối xứng bậc chẵn 2n đưa được về phương trình bậc n bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

Cách 1: Đưa phương trình về dạng $(x - 1)^2\left(x^2 - x + 1\right) = 0$. Phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.

Cách 2: Chia hai vế của phương trình cho x^2 (vì $x \neq 0$) ta được:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

Với $y = 1$, ta có $x^2 - x + 1 = 0$ (phương trình này vô nghiệm).

Với $y = 2$, ta có: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Dạng 6: Các bài toán khác

Ví dụ 1: Tìm giá trị t để phương trình sau đây có nghiệm dương: $4 - t = \dfrac{2}{x+1}$

Giải

Điều kiện $x \neq -1$. Với $t \neq 4$ thì $x = \dfrac{t-2}{4-t}$. Nghiệm này luôn luôn thỏa mãn điều kiện $x \neq -1$. Vì phương trình $\dfrac{t-2}{4-t} = -1 \Leftrightarrow 0.t = -2$ (vô nghiệm). Muốn $x > 0$ thì $\dfrac{t-2}{4-t} > 0$ suy ra $2 < t < 4$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nghiệm của phượng trình sau đây là một số nguyên:

$$\frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} + \frac{x-23}{1976} + \frac{x-21}{1978} + \frac{x-19}{1980}$$
$$= \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25} + \frac{x-1976}{23} + \frac{x-1978}{21} + \frac{x-1980}{19}$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 8 toàn quốc 1978)

Giải

Cách 1: Vận dụng nhận xét và cách giải bài toán trên, ta đi đến kết quả

$$(x - 1999)\left(\frac{1}{29} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{19} - \frac{1}{1970} - \frac{1}{1972} - \ldots - \frac{1}{1980}\right) = 0$$

$x = 1999$

Cách 2: Thử thay x = 1999, ta thấy hai vế của phương trình bằng nhau, vậy x = 1999 là một nghiệm của phương trình. Ta chứng minh rằng ngoài ra, phương trình không còn nghiệm nguyên nào khác. Thật vậy, giả sử phương trình còn 1 nghiệm nguyên khác $x' = 1999 + y, y \in Z$. Thay x' vào phương trình đã cho, ta có:

$$\frac{1970+y}{1970} + \frac{1792+y}{1972} + \ldots + \frac{1980+y}{1980} = \frac{29+y}{29} + \frac{27+y}{27} + \ldots + \frac{19+y}{19}$$

Sau khi đơn giản, ta được: $\dfrac{1}{1970} + \dfrac{1}{1972} + \ldots + \dfrac{1}{1980} = \dfrac{1}{29} + \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{1}{19}$

Rõ ràng đẳng thức này sai. Từ đó suy ra rằng x = 1999 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của k thì phương trình sau đây có nghiệm âm:

$$\frac{k(x+2) - 3(k-1)}{x+1} = 1$$

Giải

Điều kiện $x \neq -1$. Đưa phương trình về dạng: $(k-1)x = k-2$.

Với $k \neq 1$ và $k \neq 1,5$ thì phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{k-2}{k-1}$.

Muốn $x < 0$ thì giải bất phương trình $\dfrac{k-2}{k-1} < 0$

Kết quả: $1 < k < 2$ với $k \neq 1,5$.

Bài tập vận dụng

1. Giải phương trình:

a. $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{x^2-x-2} + 1$; b. $\dfrac{x+6}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+6} = \dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$;

c. $\dfrac{6}{x-5} + \dfrac{x+2}{x-8} = \dfrac{18}{(x-5)(8-x)} - 1$; d. $\dfrac{x-4}{x-1} + \dfrac{x+4}{x+1} = 2$;

e. $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{9}{(x+1)(2-x)}$; g. $\dfrac{x^2-x}{x+3} - \dfrac{x^2}{x-3} = \dfrac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

2. Giải phương trình: $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x(x-2)}$.

3. Giải phương trình: $\dfrac{315-x}{101} + \dfrac{313-x}{103} + \dfrac{311-x}{105} + \dfrac{309-x}{107} + 4 = 0$.

4. Giải phương trình: $4x - 2 = a(ax-1)$.

5. Giải phương trình: $a^2x + b = a(x+b)$.

6. Giải phương trình: $\dfrac{x-1}{a-1} + \dfrac{1-x}{1+a} - \dfrac{2x-1}{1-a^4} = \dfrac{2a^2(x-1)}{a^4-1}$.

7. Giải phương trình: $\dfrac{x-b-c}{a} + \dfrac{x-c-a}{b} + \dfrac{x-a-b}{c} = 3$.

8. Giải phương trình: $\dfrac{ax-b}{a+b} + \dfrac{bx+a}{a-b} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

9. Giải phương trình: $|x-3| - x = 7$.

10. Giải phương trình: $|x| - |2x+3| = x - 1$.

11. Giải phương trình: $x - |x+1| + 2|x-1| = 0$.

12. Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$.

13. Giải phương trình: $|x| + |1-x| = x + |x-3|$ với $1 < x < 3$.

14. Giải phương trình: $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{5x-2}{x^2-4}=1$.

15. Giải phương trình: $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$.

16. Giải phương trình: $\dfrac{5-x}{4x^2-8x}+\dfrac{7}{8x}=\dfrac{x-1}{2x(x-2)}+\dfrac{1}{8x-16}$.

17. Giải phương trình: $\dfrac{a}{2a+2b}+\dfrac{a-b}{2bx}=\dfrac{a+b}{4b}-\dfrac{b}{ax+bx}$.

18. Giải phương trình: $\dfrac{x+a+1}{x+a}+\dfrac{x+11}{x+10}=\dfrac{10}{(x+a)(x+10)}$.

19. Giải phương trình: $\dfrac{x+a}{x-3}+\dfrac{x+3}{x-a}=2$.

20. Với giá trị nào của a, phương trình sau có một nghiệm duy nhất:

$$x-a^2x-\frac{1}{1-x^2}+a=\frac{x^2}{x^2-1}.$$

21. Giải phương trình: $3x^2+7x-20=0$.

22. Giải phương trình: $x^3-5x^2+8x-4=0$.

23. Giải phương trình: $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3$.

24. Giải phương trình: $(x+2)(x-2)(x^2-10)=72$.

25. Chứng tỏ rằng phương trình: $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ vô nghiệm.

26. Giải các phương trình:

a. $9ax^3-18x^2-4ax+8=0$ (a là tham số)

b. $x^3+x^2+4=0$.

27. Giải các phương trình bậc bốn:

a) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)=12$; b) $x(x-1)(x+1)(x+2)=24$;

c) $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2)=72$; d) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$;

e) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

28. Giải các phương trình:

a) $(x^2-4)^2=8x+1$; b) $(x^2-4x)^2+2(x-2)^2=43$;

c) $(x-2)^4+(x-6)^4=82$; e) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$.

29. Cho phương trình $x^3-(m^2-m+7)x-3(m^2-m-2)=0$.

a) Tìm các giá trị của m để một trong các nghiệm của phương trình bằng 1.

b) Giải phương trình ứng với các giá trị đó của m.

30. Giải phương trình:

$$8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(x+4)^2$$

Hướng dẫn và đáp số

1. Đáp án:

a. $x=\frac{1}{2}$; b. $x = 0$; c. $x = 0$: thỏa mãn, $x = 5$: loại.

d. Vô nghiệm; e. Vô nghiệm; g. Mọi $x \neq \pm 3$.

2. Điều kiện xác định của phương trình $x \neq 0, x \neq 2$

Quy đồng khử mẫu ta được: $x(x+2) - (x-2) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x + 1 = 0$

1) $x = 0$ (không thoả mãn điều kiện xác định nên loại)

2) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (thoả mãn điều kiện xác định)

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -1$

3. Viết phương trình dưới dạng:

$$\left(\frac{315-x}{101}+1\right)+\left(\frac{313-x}{103}+1\right)+\left(\frac{311-x}{105}+1\right)+\left(\frac{309-x}{107}+1\right)=0$$

Đáp số: $x = 416$.

4. $4x-2=a(ax-1) \Leftrightarrow 4x-a^2x=2-a \Leftrightarrow (4-a^2)x=2-a$ (1)

Nếu $a \neq \pm 2$ thì phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{a+2}$.

Nếu $a = 2$ thì (1) có dạng $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = -2$ thì (1) có dạng $0x = 4$. Phương trình vô nghiệm.

5. Nếu $a \neq 1$; $a \neq 0$ phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\frac{b}{a}$.

Nếu $a = 1$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = 0$; $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = 0$; $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

6. $x = \frac{3}{4}$.

7. Điều kiện để phương trình có nghĩa $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$. Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái và trừ 3 vào vế phải, ta được:

$$\frac{x-b-c-a}{a} + \frac{x-c-a-b}{b} + \frac{x-a-b-c}{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0$, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = a + b + c$.

Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

8. Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

9. Nếu $x - 3 \geq 0$ (1) thì $|x-3| = x - 3$, phương trình đã cho trở thành $x - 3 - x = 7$ hay $0x = 10$ nên phương trình này vô nghiệm.

Nếu $x - 3 < 0$ hay $x < 3$ (2) thì $|x-3| = 3 - x$, phương trình đã cho trở thành $3 - x - x = 7 \Leftrightarrow 3 - 2x = 7 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$, thỏa mãn điều kiện $x < 3$. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

10. Các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối lần lượt bằng 0 khi $x = 0$ và $x = -\frac{3}{2}$.

a) Nếu $x < -\frac{3}{2}$ (1) thì $x < 0$ và $2x + 3 < 0$, phương trình đã cho trở thành $-x - (-2x - 3) = x - 1 \Leftrightarrow 0x = -4$, phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $-\frac{3}{2} \leq x < 0$ (2) thì $x < 0$ và $2x + 3 \geq 0$, phương trình trở thành $-x - (2x + 3) = x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, thỏa mãn điều kiện (2).

c) Nếu $x \geq 0$ (3) thì $x \geq 0$ và $2x + 3 > 0$, phương trình trở thành $x - (2x + 3) = x - 1 \Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện (3))

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$.

11. Xét các trường hợp $x < -1$; $-1 \le x < 1$; $x \ge 1$.

Đáp số: Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$.

12. Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$ (1) .Xét các trường hợp

+ Nếu $x \ge 1$: (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Thỏa mản điều kện $x \ge 1$).

+ Nếu $x < 1$:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$; $x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

13. Với $1 < x < 3$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

14. Phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)+(5x-2)}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)}{x^2-4}$$

Khử mẫu số ta có $(x - 3)(x + 2) + (5x - 2) = x^2 - 4$

Giải phương trình ta được $x = 1$.

Chú ý: Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu số, trước hết cần đặt điều kiện cho nghiệm số để mẫu số khác 0. Giá trị tìm được của ẩn số thỏa mãn điều kiện đã đặt sẽ là nghiệm của phương trình.

15. Nghệm của phương trình (nếu có) phải thỏa mãn điều kiện $x \ne 0$ (do $x^2 + x + 1 > 0$; $x^2 - x + 1 > 0$; $x^4 + x^2 + 1 > 0$).

Chú ý rằng $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$.

Sau khi biến đổi, ta được $2x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình.

16. Phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x, trừ $x = 0$ và $x = 2$.

17. $x =$ [illegible] với điều kiện $b \ne 0$; $a + b \ne 0$.

18. Nếu $a = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x, trừ $x = 0$ và $x = -10$.

Nếu $a \ne 0$, phương trình vô nghiệm.

19. Điều kiện của nghiệm số (nếu có) là $x \ne a$; $x \ne 3$. Sau khi biến đổi ta được: $2(a + 3)x = (a + 3)^2$ (1).

a) Nếu $a \ne -3$ thì $x = \frac{a+3}{2}$.

Giá trị này là nghiệm nếu: $\begin{cases} \dfrac{a+3}{2} \neq a \\ \dfrac{a+3}{2} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 3$

b) Nếu $a = -3$, phương trình (1) có dạng $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi x khác –3 và 3.

Kết luận:

a) Nếu $a \neq \pm 3$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a+3}{2}$.

b) Nếu $a = 3$, phương trình vô nghiệm.

c) Nếu $a = -3$, phương trình nghiệm đúng với mọi x trừ $x = \pm 3$.

20. Điều kiện của nghiệm số (nếu có) là $x \neq \pm 1$. Viết phương trình dưới dạng: $x - a^2x + a = \dfrac{x^2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2-1}$.

- Với $x \neq \pm 1$, phương trình tương đương với

$$x - a^2x + a = 1 \Leftrightarrow (1-a^2)x = 1 - a$$

- Với $a \neq \pm 1$ thì $x = \dfrac{1}{1+a}$.

Giá trị này là nghiệm nếu $\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} \neq 1 \\ \dfrac{1}{1+a} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -2 \end{cases}$

- Với $a = 1$, (1) có dạng $0x = 0$, nghiệm đúng với mọi $x \neq \pm 1$.
- Với $a = -1$, (1) có dạng $0x = 2$, vô nghiệm.

Vậy muốn phương trình có 1 nghiệm duy nhất thì $a \neq \pm 1$; $a \neq 0$; $a \neq -2$

21. Đưa phương trình về dạng vế trái là một tích, vế phải bằng 0 (phương trình tích) $3x^2 + 12x - 5x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(3x-5) = 0$

Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -4$; $x_2 = \dfrac{5}{3}$.

22. Đưa về phương trình tích. Chú ý tổng các hệ số ở vế trái bằng 0 nên vế trái chứa thừa số (x – 1). Phương trình có các nghiệm: $x_1 = 1$; $x_{2,3} = 2$ (nghiệm kép)

23. Biến đổi được $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 - 3x^2 - 3x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) - 3(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+x+1) = 0$

Do $x^2 + x + 1 \neq 0$ nên phương trình có 1 nghiệm $x = 4$.

24. Ta có $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$. Đặt $x^2 - 4 = y$, phương trình trở thành $y(y-6) = 72 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 = 81 \Leftrightarrow (y-3)^2 = (\pm 9)^2$

Xét $y - 3 = 9 \Leftrightarrow y = 12 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Xét $y - 3 = -9 \Leftrightarrow y = -6 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 = -2$, phương trình vô nghiệm. Vậy $x = \pm 4$.

25. Nhân hai vế của phương trình với (x – 1) được:

$(x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vì nhân hai vế của phương trình với cùng một đa thức chứa ẩn số có thể xuất hiện thêm nghiệm ngoại lai nên phải thử lại.

Giá trị $x = 1$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

26. a. Nếu $a \neq 0$, phương trình có nghiệm $\frac{2}{a}$; $\pm\frac{2}{3}$.

Nếu $a = 0$, phương trình có nghiệm: $\pm\frac{2}{3}$

b. $x^3 + x^2 + 4 = 0 = (x+2)(x^2 - x + 2) = 0$. Một nghiệm $x = -2$.

27. a) Đặt ẩn phụ $y = x^2 + x$, ta được $y^2 + 4y - 12 = 0$ nên phương trình có nghiệm: $y_1 = -6$; $y_2 = 2$.

Với $y = -6 \Rightarrow x^2 + x + 6 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $y = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$, phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

b) Nên nhân các đa thức ở vế trái một cách hợp lý làm xuất hiện những biểu thức chứa ẩn như nhau, từ đó mà đặt ẩn phụ.

Biến đổi phương trình thành: $(x^2 + x)(x^2 + x - 2) = 24$.

Đặt $x^2 + x - 1 = y$ ta được $(y+1)(y-1) = 24$. Do đó $y = \pm 5$.

Với $y = 5 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 5 \Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 2$

Với $y = -5 \Rightarrow x^2 + x - 1 = -5 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0$ (vô nghiệm)

c) $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$

$\Leftrightarrow (x^2 - 9x + 14)(x^2 - 9x + 20) = 72$

Đặt $x^2 - 9x + 17 = y \Rightarrow y = \pm 9 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 8$.

d) 4 và –8

e) Nhân hai vế của phương trình với 12 ta được $(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72$

Đặt $y=6x+7 \Rightarrow y=\pm 3$.

Nghiệm của phương trình: $-\frac{2}{3};\ -\frac{5}{3}$.

28. a) Thêm $16x^2$ vào hai vế ta được:

$$(x^2+4)^2=(4x+1)^2 \Leftrightarrow (x^2+4+4x+1)(x^2+4-4x-1)=0$$

Phương trình có 2 nghiệm là $x=1;\ x=3$.

b) $(x^2-4x)^2+2(x^2-4x+4)=43$

Đặt $x^2-4x+4=y\ (y\geq 0)$, được $y_1=9;\ y_2=-3$ (loại).

Do đó $x_1=5;\ x_2=-1$

c) 5 và 3.

e) $1; -2; -\frac{1}{2}$.

29. a) Thay $x=1$ vào phương trình ta được $-4m^2+4m=0$, tức là $m^2-m=0$ nên $m=0$ hoặc $m=1$.

b) Thay $m^2-m=0$ vào phương trình ban đầu, ta được $x^3-7x+6=0$. Phương trình có nghiệm: 1; 2; –3.

30. Giải phương trình

$$8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=(x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện phương trình có nghiệm: $x\neq 0$

$$(2)\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right]=(x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=(x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2=16$$

$\Leftrightarrow x=0$ hay $x=-8$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=-8$.

§5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Phương pháp chung

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình ta tiến hành các bước như sau

1. Lập phương trình :

Chọn ẩn số và xác định điều kiện của ẩn số: Ẩn số thường là đại lượng chưa biết trong bài toán, việc chọn một ẩn số hay hai ẩn số tùy thuộc vào số đại lượng chưa biết của bài toán .

b. Biểu diễn mối tương quan giữa đại lượng đã biết và đại lượng chưa biết.

c. lập phương trình .

2. Giải phương trình

3. Nhận định kết quả và trả lời .

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Các bài toán về chuyển động

Phương pháp giải:

Dựa vào quan hệ của ba đại lượng S: quãng đường, t: thời gian, v: vận tốc của chuyển động đều trong công thức $S = v.t$

Dựa vào nguyên lí cộng vận tốc: ví dụ khi giải bài toán thuyền trên sông ta có: $v_1 = v_0 + v_3$; $v_2 = v_0 - v_3$ *trong đó* v_1 *là vận tốc của thuyền khi xuôi dòng,* v_2 *là vận tốc của thuyền khi ngược dòng;* v_0 *là vận tốc riêng của thuyền;* v_3 *là vận tốc dòng chảy.*

Chú ý: để thuyền ngược dòng được thì phải có $v_0 > v_3$

Dạng 2: Các bài toán về năng suất lao động

Phương pháp giải:

Dựa vào quan hệ của ba đại lượng: N: năng suất lao động (khối lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian), t: thời gian để hoàn thành một công việc, s: lượng công việc đã làm, công thức biểu diễn mối quan hệ là: $N = \frac{s}{t}$.

Dạng 3: Các bài toán về làm chung - làm riêng, vòi nước chảy chung- chảy riêng...

Phương pháp giải: Dựa vào các kết quả sau:

Nếu x giờ (hoặc ngày) làm xong một công việc thì mỗi giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ *công việc đó.*

Nếu trong 1 giờ: đối tượng A làm được $\frac{1}{x}$ công việc; đối tượng B làm được $\frac{1}{y}$ công việc thì lượng công việc mà cả hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ công việc. Nếu mỗi giờ làm được $\frac{1}{x}$ công việc thì trong a giờ làm được $\frac{a}{x}$ công việc.

Dạng 4: Các bài toán sắp xếp, chia đều sản phẩm (hàng hóa...)

Phương pháp giải:

Như dạng 2, chẳng hạn với ba đại lượng N: số lượng hàng hóa phân phối cho mỗi xe; t: số xe chở hàng; s: tổng số lượng hàng hóa trong kho thì công thức biểu diễn mối quan hệ là $N=\frac{s}{t}$

Dạng 5: Các bài toán có nội dung liên quan đến cấu tạo thập phân của số.

Phương pháp giải:

Dựa vào mối liên hệ giữa các hàng trong một số.

Chú ý: $\overline{ab}=10a+b$; $\overline{abc}=100a+10b+c$

Dạng 6: Các bài toán có nội dung liên quan đến tỉ số %.

Phương pháp giải: Chú ý các kết quả sau:

m% của A nghĩa là: $\frac{m}{100}.A$

Số A bằng m% số B nghĩa là $\frac{A}{B}=\frac{m}{100}$ *hay* $A=\frac{m}{100}.B$.

Số A sau khi tăng lên m% thì được số mới có giá trị là: $A+\frac{m}{100}.A$

Dạng 7: Các bài toán có nội dung hình học

Phương pháp giải:

Chú ý đến các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức tính chu vi, diện tích,... của các hình.

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Các bài toán về chuyển động

Phương pháp giải:

Dựa vào quan hệ của ba đại lượng S: quãng đường, t: thời gian, v: vận tốc của chuyển động đều trong công thức $S=v.t$

Dựa vào nguyên lí cộng vận tốc: ví dụ khi giải bài toán thuyền trên sông ta có: $v_1=v_0+v_3$; $v_2=v_0-v_3$ *trong đó* v_1 *là vận tốc của thuyền khi xuôi dòng,* v_2 *là vận tốc của thuyền khi ngược dòng;* v_0 *là vận tốc riêng của thuyền;* v_3 *là vận tốc dòng chảy.*

Chú ý: để thuyền ngược dòng được thì phải có $v_0 > v_3$

Ví dụ 1 Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10kn. Nếu đi từ A đến B bằng ca nô thì mất 3 giờ 20 phút, còn đi bằng ô tô thì chỉ mất 2 giờ. Tính vận tốc của ca nô, biết rằng mỗi giờ ô tô đi nhanh hơn ca nô 17km.

Giải:

Đổi đơn vị: $3h20' = \frac{10}{3}h$. Gọi x (km/h) là vận tốc của ca nô (điều kiện $x > 0$). Ta có: Vận tốc của ôtô là: $x + 17$ (km/h). Quãng đường ca nô đã đi: $\frac{10}{3}x(km)$ .Quãng đường ô tô đã đi: $2(x+17)(km)$

Vì đường bộ dài hơn đường sông 10km nên ta có phương trình:

$$2(x+17) - \frac{10}{3}x = 10 \Leftrightarrow 2x + 34 - \frac{10}{3}x = 10$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = -24 \Leftrightarrow x = 18 \text{ (thõa điều kiện } x > 0 \text{ nên nhận)}$$

Vậy vận tốc của ca nô là 18 km/h.

Ví dụ 2: Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một khoảng thời gian nhất định với vận tốc định trước. Nếu ô tô đi với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến chậm 2h. Nếu đi với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1h. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Giải:

Gọi x (km) là chiều dài quãng đường AB (điều kiện $x > 0$), ta có:

- Nếu ô tô đi với vận tốc 35 km/h thì thời gian phải đi là: $\frac{x}{35}$ (h)

Nên thời gian dự định đi lúc đầu là: $\frac{x}{35} - 2$ (h)

- Nếu ô tô đi với vận tốc 50 km/h thì thời gian phải đi là: $\frac{x}{50}$ (h)

Nên thời gian dự định đi lúc đầu là: $\frac{x}{50} + 1$ (h). Do đó ta có phương trình: $\frac{x}{35} - 2 = \frac{x}{50} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{35} - \frac{x}{50} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{350}x = 3 \Leftrightarrow x = 350$

(thỏa mãn điều kiện $x > 0$ nên nhận)

Vậy: Quãng đường AB dài 350 (km)

Thời gian dự định là: $\frac{350}{35} - 2 = 8$ (giờ)

Ví dụ 3: Một người đi một nửa quãng đường AB với vận tốc 20km/h, và đi phần còn lại với vận tốc 30 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên toàn bộ quãng đường.

Giải:

Gọi vận tốc trung bình tìm là x (km/h), (x > 0). Ta có biểu thị một nửa quãng đường AB là a km (a > 0). Thời gian người đó đi nửa đầu của quãng đường là $\frac{a}{20}$ giờ, thời gian đi nửa sau của quãng đường là $\frac{a}{30}$ giờ.

Phương trình: $\frac{a}{20}+\frac{a}{30}=\frac{2a}{x}$.

Giải phương trình trên, ta được: $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x = 24$. Vận tốc trung bình là 24 km/h.

Chú ý:

a. Nếu vận tốc trên nửa đầu của quãng đường là a km/h, vận tốc trên nửa sau là b km/h thì vận tốc trung bình trên cả quãng đường bằng $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ km/h. Đại lượng này gọi là trung bình điều hòa của a và b.

b. Trung bình điều hòa của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy. Thật vậy: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a+b}{2}$ vì $4ab\le(a+b)^2$.

Ví dụ 4: Có ba ôtô chạy trên đường AB. Cùng một lúc ôtô thứ nhất chạy từ A, ôtô thứ hai chạy từ B, khi ôtô thứ nhất chạy tới B, thì từ B ôtô thứ ba bắt đầu đi về A và cùng tới A với ôtô thứ hai. Tại giữa quãng đường AB, một người thấy rằng sau khi ôtô thứ nhất đi qua 10 phút thì ôtô thứ hai đi qua và sau đó 20 phút nữa thì ôtô thứ ba đi qua. Vận tốc của ôtô thứ ba là 120km/h. Hỏi vận tốc xe ôtô thứ nhất, xe ôtô thứ hai và quãng đường AB.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toàn quốc – 1980).

Giải

Gọi x là quãng đường AB và v là vận tốc của xe thứ nhất.

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{x}{v}$.

Đi nửa quãng đường mà xe thứ nhất đã mất ít hơn xe thứ hai $\frac{1}{6}$h, vậy đi cả quãng đường thì xe thứ hai đi mất: $\frac{x}{v}+\frac{1}{3}$.

Khi xe thứ nhất đến B thì xe thứ ba mới bắt đầu đi, cho nên nếu tính từ xe thứ hai đi từ B đến lúc cả xe thứ hai và xe thứ ba cùng đến B thì thời gian đó là: $\frac{x}{v}+\frac{x}{120}$

Ta có phương trình $\frac{x}{v}+\frac{1}{3}=\frac{x}{v}+\frac{x}{120}\Rightarrow\frac{x}{120}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=40$ km.

Xe thứ ba đi đoạn đường BC mất: $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$h

Vậy xe thứ nhất đi đoạn BC mất: $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$(h)

(Vì sau khi xe thứ nhất đi qua C: 10 + 20 = 30 (phút)

thì xe thứ ba mới đi qua C. Vậy tốc độ ô tô thứ nhất là: $20:\frac{1}{3}=60$ (km/h). Thời gian xe thứ nhất đi hết đoạn đường là $\frac{2}{3}$(h). Vậy xe thứ hai đi hết cả đoạn đường mất: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ (h). Vận tốc của xe thứ hai là 40km/h.

Dạng 2: Các bài toán về năng suất lao động

Phương pháp giải:

Dựa vào quan hệ của ba đại lượng: N: năng suất lao động (khối lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian), t: thời gian để hoàn thành một công việc, s: lượng công việc đã làm, công thức biểu diễn mối quan hệ là: $N=\frac{s}{t}$.

Ví dụ 1: Một đội thợ mỏ theo kế hoạch phải khai thác một lượng than. Họ dự định mỗi ngày khai thác 50 tấn. Nhưng trên thực tế đội đã tăng năng suất nên mỗi ngày khai thác được 57 tấn. Do đó không những họ đã hoàn thành trước thời gian dự định 1 ngày mà còn vượt chỉ tiêu 13 tấn. Tính số than mà đội phải khai thác theo kế hoạch.

Giải:

Gọi x (tấn) là số than mà đội phải khai thác theo kế hoạch (điều kiện $x>0$). Ta có: Thời gian đội dự định khai thác lúc đầu là: $\frac{x}{50}$ (ngày).

Thời gian thực tế đội đã khai thác là: $\frac{x+13}{57}$ (ngày). (do khai thác vượt chỉ tiêu 13 tấn). Vì thời gian khai thác theo thực tế ít hơn thời gian khai thác theo kế hoạch là một ngày nên ta có phương trình: $\frac{x}{50}-\frac{x+13}{57}=1$

$\Leftrightarrow 7x-650=2850 \Leftrightarrow x=500$ (thỏa mãn điều kiện $x>0$ nên nhận).

Vậy theo kế hoạch đội phải khai thác 500 tấn than.

Ví dụ 2: Nhân ngày 1 tháng 6, một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. Số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi đội viên trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc chia ấy, phân đội trưởng đã đề xuất cách nhận phần kẹo của mỗi người như sau:

- Bạn thứ nhất nhận 1 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Sau khi bạn thứ nhất đã lấy phần kẹo của mình, bạn thứ hai nhận 2 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Cứ tiếp tục như thế đến bạn cuối cùng thứ n, nhận n kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội thiếu niên có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu cái kẹo.

(Đề thi học sinh giỏi, cấp II miền Bắc – 1972)

Giải

Bạn thứ n lấy n cái kẹo và $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại thì vừa hết. Vậy $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại thứ n phải bằng 0 hay bạn thứ n chỉ nhận được n cái kẹo. Có n bạn, mỗi bạn nhận n cái kẹo (vì số kẹo của mỗi người đều bằng nhau), nên số kẹo là n^2. Số kẹo bạn thứ nhất lấy là $1+\frac{n^2-1}{11}$

Ta có phương trình $1+\frac{n^2-1}{11}=n \Leftrightarrow n^2-11n+10=0$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-10)=0$. Vì n > 1 nên ta lấy nghiệm n = 10.

Kết quả: có 10 bạn và 100 cái kẹo.

Dạng 3: Các bài toán về làm chung- làm riêng, vòi nước chảy chung- chảy riêng...

Phương pháp giải: *Dựa vào các kết quả sau:*

Nếu x giờ (hoặc ngày) làm xong một công việc thì mỗi giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ *công việc đó.*

Nếu trong 1 giờ: đối tượng A làm được $\frac{1}{x}$ *công việc; đối tượng B làm được* $\frac{1}{y}$ *công việc thì lượng công việc mà cả hai làm được trong 1 giờ là* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ *công việc.*

Nếu mỗi giờ làm được $\frac{1}{x}$ *công việc thì trong a giờ làm được* $\frac{a}{x}$ *công việc.*

Dạng4: Các bài toán sắp xếp, chia đều sản phẩm (hàng hóa...)

Ví dụ : Một đội xe dự định chở một số lượng hàng, với dự tính mỗi xe chở 5 tấn. Nhưng đến khi thực hiện đội được tăng cường thêm 2 xe, vì vậy lúc này mỗi xe chỉ phải chở 4 tấn và tổng số hàng chở được nhiều hơn kế hoạch ban đầu là 1 tấn. Tính số xe tham gia chở hàng.

Giải:

Gọi x là số xe tham gia chở hàng sau khi được tăng cường.

(điều kiện $x \in N,\ x > 2$). Ta có: Số tấn hàng đội xe đã chở là $4x$.

Số xe dự định lúc đầu là: $x - 2$. Số tấn hàng dự định chở lúc đầu là $5(x - 2)$. Vì số hàng chở được theo thực tế nhiều hơn kế hoạch ban đầu 1 tấn nên ta có phương trình: $4x - 5(x-2) = 1 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa điều kiện nên nhận). Vậy số xe chở hàng theo thực tế là 9 xe.

Dạng5: Các bài toán có nội dung liên quan đến cấu tạo thập phân của số.

Phương pháp giải:

Dựa vào mối liên hệ giữa các hàng trong một số.

Chú ý: $\overline{ab} = 10a + b;\ \overline{abc} = 100a + 10b + c$

Ví dụ1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 1 vào đằng trước và một chữ số 1 vào đằng sau số đó thì số đó tăng gấp 21 lần.

Giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$, $0 \le a,b,c,d \le 9; a \ne 0; a,b,c,d \in N$. Theo bài ra ta có $\overline{1abcd1} = 21.\overline{abcd}$. Đặt $\overline{abcd} = x$.

Từ đó ta có phương trình: $100001 + 10x = 21x \Leftrightarrow x = 9091$.

Vậy số cần tìm là 9091.

Ví dụ2: Tìm một số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng chữ số tận cùng của nó bằng 4 và nếu chuyển chữ số 4 đó lên vị trí chữ số đầu tiên thì số phải tìm tăng gấp bốn lần.

Giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{abcde4}$, $0 \le a,b,c,d,e \le 9; a \ne 0; a,b,c,d,e \in N$. Theo bài ra ta có $\overline{abcde4}.4 = \overline{4abcde}$. Đặt $\overline{abcde} = x$, ta có phương trình:

$$(10x + 4).4 = 400000 + x \Leftrightarrow x = 10256.$$

Vậy số cần tìm là 10256.

Ví dụ3: Tìm một số có ba chữ số sao cho chia nó cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.

Giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{xyz}$ $(x,y,z \in \mathbb{Z};\ 1 \le x \le 9;\ 0 \le y,z \le 9)$

Ta có: $\overline{xyz} = 11(x+y+z) \Leftrightarrow 100x + 10y + z = 11x + 11y + 11z$

$\Leftrightarrow 89x = 10z + y \Leftrightarrow 89x = \overline{zy}$.

Như vậy số 89x là số không quá hai chữ số, do đó $x = 1;\ \overline{zy} = 89$ suy ra $y = 9;\ z = 8$. Thử lại : $198 = 11(1+9+8)$.

Ví dụ 4: Tìm một số có bốn chữ số sao cho chữ số hàng nghìn và hàng trăm giống nhau, chữ số hàng chục và hàng đơn vị giống nhau, số phải tìm có thể viết được thành một tích của ba thừa số, mỗi thừa số đều là số có hai chữ số và chia hết cho 11.

Giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{xxyy}$

Ta có: $\overline{xxyy} = \overline{aa}.\overline{bb}.\overline{cc} \Rightarrow 1100x + 11y = 11a.11b.11c$

$\Rightarrow 100x + y = 121abc \Rightarrow \overline{x0y} = 121.abc$

Như vậy $\overline{x0y}$ chia hết cho 121. Các bội của 121 có ba chữ số là 121; 242; 363; 484; 605; 726; 847; 968 trong đó chỉ có số 605 có chữ số hàng chục bằng 0. Vậy $\overline{x0y} = 605 \Rightarrow x = 6;\ y = 5$. Suy ra $abc = 5$, do đó trong ba số a, b, c có một số bằng 5, hai số kia bằng 1.

Thử lại: $6655 = 11.11.55$.

Dạng 6: Các bài toán có nội dung liên quan đến tỉ số %.

Phương pháp giải: *Chú ý các kết quả sau:*

m% của A nghĩa là: $\frac{m}{100}.A$

Số A bằng m% số B nghĩa là $\frac{A}{B} = \frac{m}{100}$ *hay* $A = \frac{m}{100}.B$.

Số A sau khi tăng lên m% thì được số mới có giá trị là: $A + \frac{m}{100}.A$

Ví dụ 1 : Có hai loại dung dịch muối I và II. Người ta hoà 200 gam dung dịch muối I với 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch có nồng độ muối là 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II, biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

Giải:

Gọi nồng độ muối trong dung dịch I là x(%).Theo bài ra ta có phương trình: $200.\frac{x}{100} + 300.\frac{x-20}{100} = 500.\frac{33}{100} \Leftrightarrow x = 45$.

Nồng độ muối trong các dung dịch I và II là 45% và 25%.

Ví dụ 2: Có hai loại quặng sắt, quặng loại I và loại II, tổng khối lượng là 10 tấn. Khối sắt nguyên chất trong quặng loại I là 0,8 tấn; trong quặng loại II là 0,6 tấn. Biết tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I hơn tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là 10%. Tính khối lượng mỗi loại quặng.

Giải:

Gọi x (tấn) là khối lượng quặng loại I (điều kiện $0 < x < 10$).

Ta có:

Khối lượng quặng sắt loại II là: $10 - x$ (tấn)

Tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I là: $\frac{0,8}{x}$

Tỉ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là $\frac{0,6}{10-x}$

Vì tỉ lệ sắt trong quặng loại I hơn tỉ lệ sắt trong quặng loại II là 10% nên ta có phương trình: $\frac{0,8}{x} - \frac{0,6}{10-x} = \frac{10}{100}$

$\Leftrightarrow \frac{8}{x} - \frac{6}{10-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 80 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-20) = 0$.

Phương trình trên có 2 nghiệm: $x_1 = 4$ (thỏa mãn điều kiện nên nhận)

$x_2 = 20$ (không thỏa mãn điều kiện nên loại)

Vậy khối lượng quặng sắt loại I là 4 tấn, loại II là 6 tấn.

Dạng 7: Các bài toán có nội dung hình học

Phương pháp giải:

Chú ý đến các hệ thức lượng trong tam giác, các công thức tính chu vi, diện tích,... của các hình.

Ví dụ 1: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 8m, diện tích bằng $240m^2$. Tính chu vi khu vườn đó.

Giải:

Gọi x (m) là chiều rộng khu vườn $(x > 0)$. Suy ra chiều dài khu vườn là: $x + 8$ (m). Lập phương trình: $x(x+8) = 240 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 240 = 0$

$\Leftrightarrow (x-12)(x+20) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -20 \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện, ta có: chiều rộng khu vườn là: 12 (m)

Suy ra chu vi khu vườn là: $2(x + x + 8) = 64$ (m).

Ví dụ 2: Một hình chữ nhật có chu vi bằng 320m. Nếu tăng chiều dài 10m, tăng chiều rộng 20m thì diện tích tăng $2700m^2$. Tính mỗi chiều.

Giải:

Gọi chiều dài là x (m). Theo bài ra ta có phương trình:

$(x+10)(180-x)-x(160-x)=2700 \Leftrightarrow x=90.$

Vậy chiều dài là 90m, chiều rộng là 70m.

Dạng 8: Các bài toán khác

Ví dụ 1: Vào thế kỷ thứ III trước công nguyên, vua xứ Xi-ra-cút giao cho Ac-si-mét kiểm tra xem chiếc mũ bằng vàng của mình có pha thêm bạc hay không. Chiếc mũ có trọng lượng 5 niutơn (theo đơn vị hiện nay). Khi nhúng ngập trong nước thì trọng lượng giảm đi 0,3 niutơn.

Biết rằng khi cân trong nước, vàng giảm $\frac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\frac{1}{10}$ trọng lượng. Hỏi chiếc mũ chứa bao nhiêu gam bạc? (vật có khối lượng 100 gam thì trọng lượng bằng 1 newton).

Giải:

Gọi trọng lượng bạc trong mũ là x (Newton) ($0 < x < 5$). Trọng lượng vàng trong mũ là $5-x$ (Newton). Khi nhúng ngập trong nước, trọng lượng bạc giảm $\frac{x}{10}$ (Newton), trọng lượng vàng giảm $\frac{5-x}{20}$ (Newton).

Phương trình: $\frac{x}{10}+\frac{5-x}{20}=0,3$. Vậy $x=1$.

Trọng lượng bạc trong mũ là 1 newton. Chiếc mũ chứa 100 gam bạc.

Ví dụ 2: Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

Giải:

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác vuông ABC, c là cạnh huyền.

Ta có: $a^2+b^2=c^2; a,b,c \in N^*$, diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{ab}{2}$

Trước hết ta chứng minh ab chia hết cho 12.

+ Chứng minh $ab \vdots 3$

Nếu cả a và b đồng thời không chia hết cho 3 thì a^2+b^2 chia 3 dư 2.

Suy ra số chính phương c^2 chia 3 dư 2, vô lí.

+ Chứng minh $ab \vdots 4$: Nếu a, b chẵn thì $ab \vdots 4$

- Nếu trong hai số a, b có số lẻ, chẳng hạn a lẻ.

Lúc đó c lẻ. Vì nếu c chẵn thì $c^2 \vdots 4$, trong lúc a^2+b^2 không thể chia hết cho 4. Đặt $a=2k+1, c=2h+1, k,h \in N$. Ta có:

$$b^2=(2h+1)^2-(2k+1)^2=4(h-k)(h+k+1)$$
$$=4(h-k)(h-k+1)+8k(h-k) \vdots 4$$

Suy ra ab⋮4. Nếu chia cạnh AB (chẳng hạn) thành 6 phần bằng nhau, nối các điểm chia với C thì tam giác ABC được chia thành 6 tam giác, mỗi tam giác này có diện tích bằng $\frac{ab}{12}$ là một số nguyên.

Ví dụ 3: Xác định hình vuông có độ dài cạnh là số nguyên và diện tích cũng là số nguyên gồm 4 chữ số, trong đó các chữ số hàng đơn vị hàng chục và hàng trăm giống nhau.

Thi học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế Lớp 9, 2004–2005

Giải:

Theo giả thiết diện tích hình vuông có dạng $S = \overline{abbb} = k^2 \ (k > 0, k \in Z)$

$1000 \le k^2 \le 9999 \Leftrightarrow 33 \le k \le 99$, nên k chỉ gồm có 2 chữ số:

$k = \overline{xy} = 10x + y$; $k^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 (3 \le x \le 9; 0 \le y \le 9)$

Nếu y lẻ: $y = 1;3;5;7;9 \Rightarrow y^2 = 1;9;25;49;81 \Rightarrow b = 1;5;9$. Khi đó 2xy có chữ số tận cùng là số chẵn, nên chữ số hàng chục của k^2 phải là số chẵn khác 1; 5; 9, do đó S chỉ có thể là $\overline{abbb}$. Nếu y chẵn: y = 0; 2; 4; 6; 8 $\Rightarrow y^2 = 10;4;16;36;64 \Rightarrow b = 0;4;6$. Với y = 0; k^2 chỉ có thể là 1600; 2500; 3600; 4900; 6400; 8100 không thỏa điều kiện bài toán.

Với y = 2; $k^2 = 100x^2 + 40x + 4$. Khi đó x chỉ có thể là 6 thì chữ số hàng chục của k^2 mới là 4, suy ra $k^2 = 3600 + 244 = 3844 \neq \overline{abbb}$

Với y = 4; 6 $\Rightarrow y^2 = 16$; 36, khi đó 20xy có chữ số hằng chục là số chẵn, nên chữ số hàng chục của k^2 phải là số lẻ, do đó không thể bằng 4 hoặc 6, nghĩa là $k^2 \neq \overline{abbb}$. Với y = 8; $y^2 = 64$; $k^2 = 100x^2 + 160x + 64$, khi đó x chỉ có thể là 3 hoặc 8 thì chữ số hàng chục của k^2 mới bằng 4 suy ra $k^2 = 38^2 = 1444$ hoặc $k^2 = 88^2 = 7744$ (không thỏa điều kiện bài toán).

Vậy, bài toán có một lời giả duy nhất: hình vuông cần xác định có cạnh k = 38 và diện tích S = 1444.

Ví dụ 4: A, B,C là một nhóm ba người thân thuộc. Cha của A thuộc nhóm đó,cũng vậy con gái của B và người song sinh của C cũng ở trong nhóm đó.Biết rằng C và người song sinh của C là hai người khác giới tính và C không phải là con của B. Hỏi trong ba người A, B, C ai là người khác giới tính với hai người kia?

Kì thi học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế,Lớp 9, 2004–2005

Giải:

Theo giả thiết, cha của A có thể là B hoặc C:

+ Nếu B là cha của A thì C không thể song sinh với A, vì nếu như thế thì C là con của B, trái giả thiết, do đó C và B là song sinh và khác giới tính (gt), nên C là phái nữ. Mặt khác, con gái của B không thể là C nên phải là A, do đó A phải là phái nữ. Vậy B khác giới tính với hai người còn lại là A và C.

+ Nếu C là cha của A thì C chỉ có thể là song sinh với B, theo giả thiết B phải là nữ. Mặt khác, con gái của B không thể là C(gt) nên phải là A. suy ra C và B là vợ chồng chứ không phải song sinh, dẫn đến mâu thuẫn

Vậy chỉ có duy nhất trường hợp B là cha của A và B khác giới tính với hai người còn lại là A và C (cùng là phái nữ).

Chú ý: *Khi giải toán bằng cách lập phương trình, ngoài ẩn đã chọn, đôi khi người ta còn biểu thị những đại lượng chưa biết bằng chữ. Điều lí thú là các chữ đó tuy tham gia vào quá trình giải toán nhưng chúng lại không có mặt trong đáp số của bài toán.*

Bài tập vận dụng

1. Hỡi khách qua đường, cho hay Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu tuổi ?

Biết thời thơ ấu của ông chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời, $\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi. Đến khi lập gia đình thì lại thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời.

5 năm nữa trôi qua, và một cậu con trai đã được sinh ra. Nhưng số mệnh buộc con chỉ sống bằng nửa đời cha. Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất. Đi Ô phăng thọ bao nhiêu, hãy tính cho ra ?

Bài toán bằng thơ ghi trên mộ của *Đi-ô phăng, nhà toán học cổ Hi Lạp thế kỉ II - III.*

2. Tính tuổi của hai mẹ con hiện nay, biết rằng cách đây 4 năm thì tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con, sau đây 2 năm thì tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con.

3. Một ca nô tuần tra đi xuôi khúc sông từ A đến B hết 1 giờ 10 phút và đi ngược dòng từ B về A hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng vận tốc dòng nước là 2 km/h.

4. Một người đi từ A đến B với vận tốc 24 km/h rồi đi tiếp từ B đến C với vận tốc 32 km/h. Tính quãng đường AB và BC, biết rằng quãng đường AB dài hơn quãng đường BC là 6km và vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AC là 27 km/h.

5. Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30km. Một người đi từ A đến B rồi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 10 km/h, vận tốc xuống dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 20 km/h, vận tốc trên đường nằm ngang là 15 km/h.

6. Lúc 8 giờ, An rời nhà mình để đến nhà Bích với vận tốc 4 km/h. Lúc 8 giờ 20 phút, Bích cũng rời nhà mình để đến nhà An với vận tốc 3 km/h. An gặp Bích trên đường, rồi cả hai cùng đi về nhà Bích. Khi trở về đến

nhà mình, An tính ra rằng quãng đường mình đã đi dài gấp bốn lần quãng đường Bích đã đi. Tính khoảng cách từ nhà An đến nhà Bích.

7. Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô cùng đi từ A đến B, khởi hành lần lượt lúc 7 giờ, 8 giờ, 9 giờ với vận tốc theo thứ tự bằng 10 km/h, 30 km/h, 50 km/h. Đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy ?

8. Người ta pha 3 kg nước nóng ở 90^0C với 2 kg nước lạnh ở 20^oC. Tính nhiệt độ sau cùng của nước (bỏ qua sự mất nhiệt).

9. Trên quãng đường AB của một thành phố, cứ 6 phút lại có một xe buýt đi theo chiều từ A đến B, và cũng cứ 6 phút lại có một xe buýt đi theo chiều ngược lại. Các xe này chuyển động đều với cùng vận tốc như nhau. Một khách du lịch đi bộ từ A đến B nhận thấy cứ 5 phút lại gặp một xe đi từ B về phía mình. Hỏi cứ bao nhiêu phút lại có một xe đi từ A vượt qua người đó?

10. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm 10 giờ, đội thứ hai làm 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.

11. Trong một buổi họp mặt giữa hai lớp 8A và 8B, có tất cả 50 học sinh tham gia. Các bạn lớp 8B tính số người quen ở lớp 8A và thấy rằng bạn Anh quen 11 bạn, bạn Bắc quen 12 bạn, bạn Châu quen 13 bạn,... và cứ như vậy đến bạn cuối cùng là bạn Yến quen tất cả các bạn của lớp 8A. Tính số học sinh mỗi lớp tham gia họp mặt.

12. Một nông dân mang cam ra chợ, bán cho người khách thứ nhất 2 số cam và thêm 1 quả, bán cho người khách thứ hai 2 số cam còn lại và thêm 2 quả, bán cho người khách thứ ba 2 số cam còn lại và thêm 2 quả... Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi người khách thứ sáu mua xong thì số cam vừa hết. Tính tổng số cam của người nông dân đem bán.

13. Có ba cánh đồng cỏ như nhau, cỏ cũng luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ mỗi cánh đồng. Biết rằng 9 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng I trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 4 tuần.

   a. Tính xem trên mỗi cánh đồng, số cỏ mọc thêm trong một tuần bằng mấy phần của số cỏ có sẵn lúc đầu ?

   b. Bao nhiêu con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần ?

14. *Bài toán của Niu-tơn.* Một cánh đồng cỏ mọc dày như nhau, cỏ luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng. Biết rằng 12 con bò ăn hết cỏ trên $\frac{10}{3}$ acrơ trong 4 tuần, 21 con bò ăn hết cỏ trên 10 acrơ trong 9 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 24 acrơ trong 18 tuần (1 acrơ = 4047m^2).

15. Một khách du lịch đi từ A đến B nhận thấy cứ 15 phút lại gặp một xe buýt đi cùng chiều vượt qua, cứ 10 phút lại gặp một xe buýt chạy ngược lại. Biết rằng các xe buýt đều chạy với cùng một vận tốc, khởi hành sau những khoảng thời gian bằng nhau và không dừng lại trên đường (trên chiều từ A đến B cũng như trên chiều ngược lại). Hỏi cứ sau bao nhiêu phút thì các xe buýt lại lần lượt rời bến ?

16. Một người đi xe máy từ A đến B, vận tốc 40km/h. Đi được 15 phút, người đó gặp một ôtô từ B đến, vận tốc 50km/h. Ôtô đến A nghỉ 15 phút rồi trở về B và gặp người đi xe máy cách B 20km. Tính quãng đường AB.

17. Người ta đặt một vòi nước chảy vào một bể nước và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra, mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ rưỡi đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh gấp 2 lần vòi chảy ra.

a) Tính thời gian nước chảy vào lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

b) Nếu chiều cao bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

18. Một công trường giao công việc sửa một đoạn đường cho các đội lao động như sau: Đội 1 nhận 10m và $\frac{1}{10}$ phần còn lại.

Đội 2 nhận 20m và $\frac{1}{10}$ phần còn lại. Đội 3 nhận 30m và $\frac{1}{10}$ phầm còn lại. Cứ chia như vậy cho đến đội cuối cùng thì phần đường của mỗi đội đều bằng nhau. Tính số đội tham gia sửa đường và chiều dài toàn bộ đoạn đường phải sửa.

19. Tổng của bốn số bằng 45. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm 2, số thứ hai trừ đi 2, số thứ ba nhân với 2, số thứ tư chia cho 2 thì bốn kết quả đó bằng nhau. Tìm bốn số ban đầu.

20. Cho một số tự nhiên có năm chữ số. Nếu viết thêm chữ số 1 vào sau số đó thì ta được số A có sáu chữ số. Nếu viết thêm chữ số 1 vào trước số đó ta được số B có sáu chữ số. Viết rằng $A = 3B$. Tìm số có năm chữ số ban đầu.

21. Một ô tô phải đi quãng đường AB 60km trong một thời gian nhất định. Ô tô đi nửa đầu quãng đường với vận tốc lớn hơn dự định 10km/h và đi nửa sau quãng đường với vận tốc kém hơn dự định 6km/h. Biết ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô dự định đi quãng đường AB.

22. Hai vòi nước chảy vào bể thì bể sẽ đầy trong 3 giờ 20 phút. Người ta cho vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ, vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{4}{5}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

23. Một cửa hàng bán trứng trong một số ngày. Ngày thứ nhất cửa hàng bán 150 quả và $\frac{1}{9}$ số còn lại, ngày thứ hai bán 200 quả và $\frac{1}{9}$ số còn lại, ngày thứ ba bán 250 quả và $\frac{1}{9}$ số còn lại, ...

Cứ bán như vậy cho đến hết thì số trứng mỗi ngày bán bằng nhau. Hỏi số trứng có tất cả bao nhiêu?

Hướng dẫn và đáp số

1. Gọi x là tuổi thọ của Đi-ô-phăng. Ta có phương trình:

$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x; x=84.$ Đi-ô-phăng thọ 84 tuổi.

2. Gọi tuổi con hiện nay là x, phương trình:

$3(x+2)-5(x-4)=6 \Leftrightarrow x=10.$

Tuổi con hiện nay là 10, tuổi mẹ hiện nay là 34.

3. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h). Phương trình:

$1\frac{1}{6}(x+2)=1\frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow x=16.$

4. Gọi quãng đường AB là x(km). Phương trình:

$\frac{x}{24}+\frac{x-6}{32}=\frac{2x-6}{27} \Leftrightarrow x=30.$ Suy ra AB dài 30km, BC dài 24km.

5. Gọi quãng đường CD là x(km). Quãng đường AC + DB = 30 – x. Kể cả lúc đi và lúc về thì quãng đường nằm ngang dài 2x, quãng đường lên dốc dài 30 – x, quãng đường xuống dốc dài 30 – x.

Phương trình: $\frac{2x}{15}+\frac{30-x}{10}+\frac{30-x}{20}=4\frac{5}{12} \Leftrightarrow x=5.$

6. Gọi quãng đường từ nhà An đến nhà Bích là x(km). Quãng đường An đã đi là 2x, quãng đường Bích đã đi là $2x:4=\frac{x}{2}$. Gọi C là chỗ hai người gặp nhau thì $BC=\frac{x}{2}:2=\frac{x}{4}$. Thời gian An đi đoạn AC là: $\frac{3x}{4}:4=\frac{3x}{16}$.

Thời gian Bích đi đoạn BC là: $\frac{x}{4}:3=\frac{x}{12}$.

Phương trình: $\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=3,2$. Đáp số: 3,2 km.

7. Lúc 9 giờ, người đi xe đạp cách A 20km, người đi xe máy cách A 30km. Gọi x là số giờ để ô tô ở vị trí cách đều hai người kia (kể từ lúc 9 giờ).

Phương trình: $50x-(20+10x)=(30+30x)-50x\Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$.

Đáp số 9 giờ 50 phút.

8. Nhiệt độ sau cùng của nước là 62^0C.

9. Gọi thời gian phải tìm là x (phút). Biểu thị thời gian người du lịch đi từ A đến B là a phút. Phương trình: $\frac{2a}{6}=\frac{a}{5}+\frac{a}{x}\Leftrightarrow x=7,5$.

10. Đội thứ nhất cần 40 giờ, đội thứ hai cần 60 giờ để làm một mình xong công việc.

11. Gọi số học sinh của lớp 8B là x.

Bạn thứ nhất của lớp 8B(bạn Anh) quen 10+1 bạn của lớp 8A.

Bạn thứ hai của lớp 8B (bạn Bắc) quen 10 + 2 bạn của lớp 8A.

Bạn thứ ba của lớp 8B (bạn Châu) quen 10 + 3 bạn của lớp 8A. ...

Bạn thứ x của lớp 8B (bạn Yến) quen 10 + x bạn của lớp 8A, đó là tất cả số học sinh 8A. Phương trình: $x+(10+x)=50\Leftrightarrow x=20$.

Lớp 8B có 20 học sinh, lớp 8A có 30 học sinh dự họp mặt.

12. Đáp số: 63 quả.

13. a. Gọi số cỏ có sẵn trên mỗi cánh đồng là 1 (phần diện tích), số cỏ mọc thêm trong mỗi tuần trên mỗi cánh đồng bằng y lần số cỏ có sẵn.

Số cỏ 9 con bò ăn trong 2 tuần ở cánh đồng I bằng 1 + 2y lần số cỏ có sẵn, do đó mỗi con bò tron g một tuần ăn: $\frac{1+2y}{9.2}$ lần số cỏ có sẵn. (1)

Số cỏ 6 con bò ăn trong 4 tuần ở cánh đồng II bằng 1 + 4y lần số cỏ có sẵn, do đó mỗi con bò trong một tuần ăn: $\frac{1+4y}{6.4}$ lần số cỏ có sẵn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24}$, từ đó $y = \frac{1}{4}$.

Số cỏ mọc thêm trong một tuần bằng $\frac{1}{4}$ số cỏ ban đầu.

b. Gọi số bò phải tìm là x. Lập luận tương tự ta có $\frac{1+4y}{6.4} = \frac{1+6y}{6x}$. Thay $y = \frac{1}{4}$ vào phương trình, ta được x = 5. Vậy 5 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần.

14. Đáp số: 36 con bò.

15. Gọi thời gian phải tìm là x (phút). Ta gọi thời gian người du lịch đi từ A đến B là a phút. Xét các xe buýt đi theo chiều từ B đến A: trong a phút đi từ A đến B người đó gặp $\frac{a}{10}$ xe ngược chiều chạy lại, trong a phút đi từ A đến B người đó gặp $\frac{a}{15}$ xe cùng chiều vượt qua (đi từ B đến A).

Như vậy trong 2a phút có $\frac{a}{10} + \frac{a}{15}$ xe đi qua A theo chiều từ B đến A.

Phương trình: $\frac{2a}{x} = \frac{a}{15} + \frac{a}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 12.$

Cứ 12 phút các xe buýt lại lần lượt rời bến.

Chú ý: Giải bằng phương trình số học: Giả sử người du lịch đi từ A đến B trong 30 phút rồi đi từ B về A trong 30 phút nữa thì người đó gặp 30 : 10 = 3 xe đi ngược chiều (đi từ B đến A) và 30 : 15 = 2 xe đi cùng chiều (đi từ B đến A).

Vậy cứ 60 phút có 3 + 2 = 5 xe đi từ B đến A qua địa điểm A. Do đó cứ 60 : 5 = 12 phút lại có hai xe cùng chiều rời bến.

16. Gọi C và D là nơi ô tô gặp người đi xe máy lần thứ nhất và lần thứ hai. Gọi quãng đường CD là x (km).

Quãng đường AC dài: $40 \text{ km} \times \frac{1}{4} = 10 \text{ km}$.

Thời gian người đi xe máy đi từ C đến D là $\frac{x}{40}$ (giờ)

Trong thời gian đó, ô tô đi đoạn CA, AD và nghỉ 15 phút.

Ta có phương trình: $\frac{x}{40} = \frac{10+10+x}{50} + \frac{1}{4}$.

Suy ra $x = 130$. Quãng đường AB dài: $10 + 130 + 20 = 160$ (km).

17. a) Gọi thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mức nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ.

Trong 1 giờ, vòi chảy vào được $\frac{1}{1,5}=\frac{2}{3}$ (bể)

Trong 1 giờ, vòi chảy ra được: $\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$ (bể)

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong 1 giờ là $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (bể).

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc, nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{2}{3}.x$ (bể).

Trong 2 giờ 42 phút – x giờ (tức 2,7 giờ – x giờ) còn lại, cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{1}{3}(2,7-x)$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}(2,7-x)=1$. Do đó $x=0,3$ (giờ).

Vậy thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là 0,3 giờ hay 18 phút.

b) Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1,5 giờ thì mức nước cao 2m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0,3 giờ thì mức nước cao $\frac{2m\times 0,3}{1,5}=0,4m$.

Do đó khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy là 40cm.

18. Gọi chiều dài toàn bộ đoạn đường phải sửa là x (m).

Đoạn đường đội 1 nhận dài $10+0,1(x-10)$ (m) tức là $0,1x+9$ (m).

Phần còn lại sau khi đội 1 nhận là $x-(0,1x+9)$ (m) tức là $0,9x-9$ (m).

Đoạn đường đội 2 nhận dài $20+0,1(0,9x-9-20)$ (m) tức là $0,09x+17,1$ (m). Vì chiều dài đoạn đường hai đội làm bằng nhau nên $0,1x+9=0,09x+17,1$.

Do đó $x=810$. Đoạn đường dài 810m, mỗi đội phải làm $0,1.810+9=90m$. Số đội tham gia sửa đường là $810:90=9$ (đội).

Chú ý: Nếu đề bài cho thêm "đoạn đường được chia vừa hết" thì còn có thể giải như sau:

Gọi số đội tham gia sửa đường là x. Do đoạn đường được chia vừa hết nên đội cuối cùng nhận 10x (m), chiều dài toàn bộ quãng đường là $10x^2$ (m).

Chiều dài đoạn đường đội 1 nhận là: $10+\frac{10x^2-10}{10}=10+x^2-1$

Vì chiều dài đoạn đường mỗi đội nhận bằng nhau nên:

$10 + x^2 - 1 = 10x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 10(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x-9) = 0$

Do $x \neq 1$ nên $x = 9$.

Vậy có 9 đội tham gia sửa đường.

Cả quãng đường dài: $10.9^2 = 810$ (m).

19. Gọi x là kết quả của mỗi số sau khi đã thay đổi.

Ta có phương trình: $(x-2) + (x+2) + \frac{x}{2} + 2x = 45 \Rightarrow x = 10$.

Vậy, bốn số ban đầu là 8; 12; 5; 20.

20. Gọi số phải tìm là $\overline{abcde} = x$. Ta có:

$\overline{abcde1} = 3.\overline{1abcde} \Leftrightarrow 10x + 1 = 3.(100000 + x) \Leftrightarrow x = 42857$

21. Gọi vận tốc dự định đi AB là x (km/h).

Ta có phương trình: $\frac{30}{x+10} + \frac{30}{x-6} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 30$

Thời gian ô tô dự định đi AB là: $\frac{60}{30} = 2$ (giờ).

22. 5 giờ và 10 giờ.

23. 2400 quả.

Một số bài toán tự giải

1. Một ca nô xuôi khúc sông dài 40km rồi ngược khúc sông ấy hết 4 giờ rưỡi. Biết thời gian ca nô xuôi 5km bằng thời gian ca nô ngược 4km. Tính vận tốc dòng nước.

2. Tuổi hai anh em cộng lại bằng 12. Tuổi anh hiện nay gấp đôi tuổi em. Tính tuổi mỗi người hiện nay.

3. Để chở một số vật liệu đến công trường, phải điều động 30 xe loại nhỏ làm 8 giờ và 9 xe loại lớn làm 6 giờ. Nếu điều 30 xe loại nhỏ làm 6 giờ và 9 xe loại lớn làm 8 giờ thì mới chở được 13/15 số vật liệu. Hỏi 30 xe loại nhỏ chở hết số vật liệu trong bao lâu?

4. Tổng hai cạnh của hai khối lập phương bằng 15cm, tổng các diện tích toàn phần của chúng bằng $750cm^2$. Tính thể tích mỗi khối lập phương.

5. Có ba thùng đựng nước. Lần thứ nhất, người ta đổ ở thùng 1 sang hai thùng kia một số nước bằng số nước ở mỗi thùng có lúc đó. Lần thứ hai, người ta đổ ở thùng 2 sang hai thùng kia một số nước gấp đôi số nước ở mỗi thùng có lúc đó. Lần thứ ba, người ta đổ ở thùng 3 sang hai thùng kia một số nước bằng số nước ở mỗi thùng có lúc đó. Cuối cùng mỗi thùng đều có 24 lít nước. Tính số nước ở mỗi thùng lúc đầu.

6. Một cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng và trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy.

Biết rằng 9 con bò ăn hết cỏ của cánh đồng trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết cỏ của cánh đồng trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ của cánh đồng trong 6 tuần.

7. Ba tổ công nhân phải làm một số dụng cụ như nhau theo định mức. Do làm vượt mức quy đinh nên tổ 1 được thưởng 90đ, tổ 2 được thưởng 120đ, tổ 3 được thưởng 330đ. Tổ 3 làm được 75 dụng cụ, bằng tổng số dụng cụ hai tổ kia đã làm. Tính xem số dụng cụ mỗi tổ phải làm theo định mức và tiền thưởng cho một dụng cụ vượt định mức là bao nhiêu?

8. Tìm một số có 4 chữ số thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

a) Chữ số hàng nghìn và hàng trăm giống nhau.

b) Chữ số hàng chục và hàng đơn vị giống nhau.

c) Số đó có thể viết được thành một tích của 3 thừa số, mỗi thừa số đều là số có 2 chữ số và chia hết cho 11.

9. Tìm một số chính phương có 4 chữ số, biết rằng nếu mỗi chữ số giảm đi một đơn vị (mỗi chữ số của số chính phương này đều lớn hơn 0), thì được một số mới cũng là số chính phương.

Nếu thêm 3 vào mỗi chữ số của một số chính phương có 4 chữ số (mỗi chữ số của số chính phương này đều nhỏ hơn 7) thì lại được một số chính phương. Tìm hai số chính phương đó.

10. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng bình phương của số đó trừ đi bình phương của số gồm chính 2 chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

11. Một phép chia có thương là 12 và số dư là 185. Có thể thêm vào số bị chia và số chia cùng một số tự nhiên nào để thương của phép chia vẫn không thay đổi.

12. Tìm số của hai chữ số sao cho tỉ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị:

a) Nhỏ nhất. b) Lớn nhất.

13. Người ta chia một đoạn thẳng dài 12cm thành ba phần và dựng ba hình vuông có cạnh là ba đoạn ấy. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các diện tích ba hình vuông dựng được.

§6. Bất phương trình bậc nhất

Một số kiến thức cơ bản

1. *Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \le 0$), trong đó x là ẩn, a và b là cá số đã cho, $a \neq 0$.*
2. *Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.*
3. *Khi giải một bất phương trình, ta có thể:*
   - Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
   - Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số dương.
   - Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình.

Ghi nhớ quan trọng:

Trong khi giải các bất phương trình có ẩn ở mẫu thức, không được khử mẫu thức. Ta làm như sau:
- Chuyển tất cả các biểu thức về vế trái (vế phải là 0).
- Quy đồng mẫu thức trong vế trái.
- Lập bảng xét dấu.

4. *Một số kiến thức khác*

1) $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ a = \pm b \end{cases}$ 2) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

3) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ 4) $|a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b < 0 \\ \begin{cases} b \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} a > b \\ a < -b \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

5). $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) < 0$

Biến đổi bất phương trình về dạng tích

$$A.B \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \ge 0 \\ B \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \le 0 \\ B \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ hay } A.B \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \ge 0 \\ B \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \le 0 \\ B \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

5. *Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ ($a \neq 0$)*

Nhị thức $ax + b$ ($a \neq 0$):
- Cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức;
- Trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

Chứng minh: Gọi x_0 là nghiệm của nhị thức $ax + b$ thì $x_0 = -\frac{b}{a}$. Xét $\frac{ax+b}{a} = x + \frac{b}{a} = x - x_0$.

Nếu $x > x_0$ thì $x - x_0 > 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{a} > 0 \Rightarrow ax + b$ cùng dấu với a.

Nếu $x < x_0$ thì $x - x_0 < 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{a} < 0 \Rightarrow ax + b$ trái dấu với a.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Giải bất phương trình

Khi giải một bất phương trình, ta có thể:

- Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số dương.
- Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình.

Dạng 2: Giải bất phương trình có chứa tham số

Dạng 3: Giải bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Để giải các phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, cần khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta nhớ lại: giá trị tuyệt đối của một biểu thức bằng chính nó nếu biểu thức không âm, bằng số đối của nó nếu biểu thức âm:

$$|A| = \begin{cases} A (A \geq 0) \\ -A (A < 0) \end{cases}$$

Do đó, để khử dấu giá trị tuyệt đối, cần xét giá trị của biến làm cho biểu thức không âm hay âm. Nếu biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối là nhị thức bậc nhất, ta cần nhớ định lý về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$

Nhận xét: Trong cách giải trên, ta đã khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến. Trong một số trường hợp, có thể giải nhanh hơn cách dùng phương pháp chung nói trên bởi các biến đổi tương đương sau:

Trường hợp 1:

a. Với a là số dương, ta có: $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$.

b. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Trường hợp 2:

a. Với a là số dương, ta có: $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right.$

b. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{array}\right.$

Trường hợp 3: $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

Dạng 4 Giải bất phương trình có chứa ẩn ở mẫu số

Trong khi giải các bất phương trình có ẩn ở mẫu thức, không được khử mẫu thức. Ta làm như sau:

- Chuyển tất cả các biểu thức về vế trái (vế phải là 0).

- Quy đồng mẫu thức trong vế trái.

- Lập bảng xét dấu.

Dạng 5 Giải bất phương trình tích

Dạng 6 Giải bất phương trình dạng khác

Có nhiều trường hợp để giải phương trình f(x, y...) = 0, ta lại chứng minh bất phương trình $f(x,y...) \geq 0$ *hoặc* $f(x,y...) \leq 0$ *và chỉ ra điều kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức.*

Các ví dụ minh họa

Dạng 1 Giải bất phương trình

Ví dụ 1: Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình: $\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8$ và $1-\frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$.

Giải

Ta có $\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8 \Leftrightarrow x \geq 12$ và

$1-\frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4} \Leftrightarrow$ $x < 13$ và $x \in Z$ nên $x = 12$.

Ví dụ 2: Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

$$2(3x-4) < 3(4x-3) + 16 \text{ và } 4(1+x) < 3x+5.$$

Giải

Ta có $2(3x-4) < 3(4x-3)16 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$, và

$4(1+x) < 3x+5 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \in Z$ nên $x \in \{-2;-1;0\}$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\frac{x+2}{89} + \frac{x+5}{86} > \frac{x+8}{83} + \frac{x+11}{80}$.

Giải

Cộng 1 vào mỗi phân thức rồi đặt nhân tử chung:

$$(x+91)\left(\frac{1}{89}+\frac{1}{86}-\frac{1}{83}-\frac{1}{80}\right)>0 \Leftrightarrow x<-91.$$

Dạng 2: Giải bất phương trình có chứa tham số

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $ax+4>2x+a^2$.

Giải

$ax+4>2x+a^2$; $(a-2)x>a^2-4$ (1)

Nếu $a>2$ thì $x>\dfrac{a^2-4}{a-2} \Leftrightarrow x>a+2$

Nếu $a=2$ thì (1) trở thành $0x>0$ (vô nghiệm)

Nếu $a<2$ thì $x<a+2$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\dfrac{x}{a}+a>x+1$ với $a>1$.

Giải

Do $a>1$ nên ta nhân hai vế của bất phương trình với số dương a, ta được bất phương trình tương đương :

$x+a^2>ax+a$; $x-ax>a-a^2$; $(1-a)x>a(1-a)$

Vì $a>1 \Leftrightarrow 1-a<0$ nên $x<a$.

Vậy, với $a>1$, bất phương trình đã cho có nghiệm $x<a$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $(a+1)x+\dfrac{ax-1}{a}>\dfrac{1}{a}$ với $\begin{cases} a>-2 \\ a\neq 0 \end{cases}$

Giải

Ở bài này không nên nhân hai vế của bất phương trình với mẫu số chung là a, vì phải xét trường hợp $a>0$ và $a<0$. Nên viết bất phương trình đã cho trở thành: $(a+1)x+x-\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{a} \Leftrightarrow (a+2)x>\dfrac{2}{a}$.

Vì $a+2>0$ nên $x>\dfrac{2}{a(a+2)}$. Vậy, với $a>-2$ và khác 0, nghiệm của bất phương trình là $x>\dfrac{2}{a(a+2)}$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình với m là hằng số: $mx+1\geq m^2+x$.

Giải :

Biến đổi tương đương:

$mx+1\geq m^2+x \Leftrightarrow mx-x\geq m^2-1 \Leftrightarrow (m-1)x\geq m^2-1.$ (1)

Nếu $m>1$ thì nghiệm của bất phương trình là: $x\geq m+1$.

Nếu $m<1$ thì nghiệm của bất phương trình là: $x\leq m+1$.

Nếu $m = 1$ thì (1) có dạng $0x \ge 0$: nghiệm của bất phương trình là mọi giá trị x.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình với a là hằng số : $\frac{x+1}{a} + ax > \frac{x+2}{a} - 2x$

Giải:

Điều kiện xác định của bất phương trình là $a \neq 0$. Biến đổi bất phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{1}{a} + ax > \frac{x}{a} + \frac{2}{a} - 2x \Leftrightarrow ax + 2x > \frac{2}{a} - \frac{1}{a} \Leftrightarrow (a+2)x > \frac{1}{a}$.

Nếu $a > -2, a \neq 0$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{a(a+2)}$.

Nếu $a < -2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{1}{a(a+2)}$.

Nếu $a = -2$ thì (1) có dạng $0x > -\frac{1}{2}$ nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 6: Giải và biện luận: $(m-2)x \ge (2m-1)x - 3$ (m là tham số).

Giải

$(m-2)x \ge (2m-1)x - 3 \Leftrightarrow (m+1)x \le 3$

a. $m+1 \neq 0$: $m > -1$ $(m+1 > 0)$: $x \le \frac{3}{m+1}$

$m < -1(m+1 < 0): x \ge \frac{3}{m+1}$

b. $m + 1 = 0$

$(m = -1)$ bất phương trình có dạng: $0.x \le 3$, được nghiệm với mọi x.

Ví dụ 7: Giải và biện luận bất phương trình: $\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}$ (m là tham số)

Giải

$m(x-2) + 2(x-m) > 3(x+1) \Leftrightarrow mx - 2m + 2x - 2m > 3x + 3$

$\Leftrightarrow (m-1)x > 4m + 3$

a. $m - 1 > 0(m > 1): x > \frac{4m+3}{m-1}$

b. $m - 1 < 0(m < 1): x < \frac{4m+3}{m-1}$

c. $m - 1 = 0(m = 1)$: $0x > 7$, vô nghiệm.

Ví dụ 8. Giải bất phương trình: $x+\frac{x-1}{a}<\frac{x+1}{a}-(a-2)x$ với a là số đã biết.

Giải:

Không nên nhân hai vế của bất phương trình với a, vì như vậy phải xét hai trường hợp $a>0$ và $a<0$. Chuyển vế, ta được:

$$(a-2)x+x<\frac{x+1}{a}-\frac{x-1}{a} \Leftrightarrow (a-1)x<\frac{2}{a} \quad (1)$$

Nếu $a>1$ thì $x<\frac{2}{a(a-1)}$ là nghiệm của bất phương trình.

Nếu $a<1;\ a\neq 0$ thì $x>\frac{2}{a(a-1)}$ là nghiệm của bất phương trình.

Nếu $a=1$ thì (1) có dạng $0x<2$, nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 9. Giải bất phương trình: $x+\frac{x-1}{a}<\frac{x+1}{a}-(a-2)x$ với a là số đi biết.

Giải:

Không nên nhân hai vế của bất phương trình với a, vì như vậy phải xét hai trường hợp $a>0$ và $a<0$. Chuyển vế, ta được:

$$(a-2)x+x<\frac{x+1}{a}-\frac{x-1}{a} \Leftrightarrow (a-1)x<\frac{2}{a} \quad (1)$$

Nếu $a>1$ thì $x<\frac{2}{a(a-1)}$ là nghiệm của bất phương trình.

Nếu $a<1;\ a\neq 0$ thì $x>\frac{2}{a(a-1)}$ là nghiệm của bất phương trình.

Nếu $a=1$ thì (1) có dạng $0x<2$, nghiệm đúng với mọi x.

Dạng 3: Giải bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1: Giải phương trình: $|x-5|+|x+3|=3x-1$. (1)

Giải:

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x-5$ và $x+3$:

x		−3		5	
x − 5	−		−	0	+
x + 3	−	0	+		+

Xét ba khoảng giá trị của biến x:

a $x<-3$: phương trình (1) có dạng: $(5-x)-(x+3)=3x-1$, tìn được $x=\frac{3}{5}$, loại vì giá trị này không thuộc khoảng đang xét.

b. $-3 \le x < 5$: phương trình (1) có dạng: $(5-x)+(x+3)=3x-1 \Leftrightarrow -3x=-9$, tìm được $x=3$, thuộc khoảng đang xét.

c. $x \ge 5$: phương trình (1) có dạng: $(x-5)+(x+3)=3x-1 \Leftrightarrow -x=1$, tìm được $x=-1$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S=\{3\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $|2x-1|+|2x-5|=4$.

Giải

Cách 1. a. Xét khoảng $x<\frac{1}{2}$, (1) có dạng:

$1-2x+5-2x=4$, tìm được $x=\frac{1}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

b. Xét khoảng $\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$, (1) có dạng: $2x-1+5-2x=4 \Leftrightarrow 0x=0$.

Phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét, tức là:

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}.$$

c. Xét khoảng $x>\frac{5}{2}$, (1) có dạng:

$2x-1+2x-5=4$, tìm được $x=\frac{5}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S=\left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$

Cách 2. Áp dụng hai lần bất đẳng thức $|A| \ge A$ (xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $A \ge 0$), ta có: $|2x-1|+|5-2x| \ge (2x-1)+(5-2x)=4$.

Theo đề bài, phải xảy ra đẳng thức, do đó:

$$\begin{cases}2x-1 \ge 0\\5-2x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge \frac{1}{2}\\x \le \frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $||x|-3|=x+1$. (1)

Giải

a. Xét khoảng $x \ge 0$, (1) có dạng: $|x-3|=x+1$. (2)

Lại xét hai trường hợp: Với $x \ge 3$, (2) có dạng $x-3=x+1$, vô nghiệm.

Với $0 \le x < 3$, (2) có dạng $3-x=x+1 \Leftrightarrow x=1$, thuộc khoảng đang xét.

b. Xét khoảng $x < 0$, (1) có dạng $|-x-3| = x+1$ tức là: $|x+3| = x+1$. (3)

Lại xét hai trường hợp:

Với $-3 \le x < 0$, (3) có dạng $x + 3 = x + 1$, vô nghiệm.

Với $x < -3$, (3) có dạng $-x-3 = x+1 \Leftrightarrow x = -2$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận: $S = \{1\}$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình: $|x| - x + 2 \le 2|x-4|$.

Giải:

Lập bảng xét dấu các biểu thức x và $x-4$:

x		0		4	
x	−	0	+		+
x − 4	−		−	0	+

a. Xét khoảng $x < 0$, (1) có dạng: $-x - x + 2 \le 2(4-x) \Leftrightarrow 0x \le 6$,

Nghiệm của bất phương trình (1) thuộc khoảng đang xét là $x < 0$

b. Xét khoảng $0 < x < 4$,(1) có dạng $x - x + 2 \le 2(4-x)$

$$x \le 3.$$

Nghiệm của bất phương trình (1) thuộc khoảng đang xét là: $0 \le x \le 3$

c. Xét khoảng $x \ge 4$, (1) có dạng: $x - x + 2 \le 2x - 8 \Leftrightarrow x \ge 5$

Thỏa mãn điều kiện $x \ge 4$.

Kết luận: nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \le 3; x \ge 5$.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình: $3|2x-1| < 2x+1$ (1)

Giải

Cách 1 (theo phương pháp chung):

a. Xét khoảng $x < \frac{1}{2}$, (1) có dạng:

$$3(1-2x) < 2x+1 \Leftrightarrow 3 - 6x < 2x + 1 \Leftrightarrow -8x < -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này là $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

b. Xét khoảng $x \ge \frac{1}{2}$, (1) có dạng:

$$3(2x-1) < 2x+1 \Leftrightarrow 6x - 3 < 2x + 1 \Leftrightarrow 4x < 4 \Leftrightarrow x < 1.$$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này là $\frac{1}{2} \le x < 1$.

Kết luận: nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{4} < x < 1$.

Cách 2: (Biến đổi thành bất phương trình tương đương theo dạng 1b):

$$3|2x-1| < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2x-1) > -(2x+1) \\ 3(2x-1) < 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3 > -2x-1 \\ 6x-3 < 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x > 2 \\ 4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 1.$$

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $2|x-1| < x+1$.

Giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} -x-1 < 2(x-1) \\ 2(x-1) < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 < 2x-2 \\ 2x-2 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x < -1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 3.$$

Dạng 4: Giải bất phương trình có chứa ẩn ở mẫu số

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $\frac{1-5x}{x-1} \ge 1$.

Giải:

Điều kiện xác định: $x \ne 1$.

$$\frac{1-5x}{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{x-1} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-5x-x+1}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x-1} \ge 0.$$

Lập bảng xét dấu:

x		$\frac{1}{3}$		1	
$1-3x$	+	0	−	|	−
$x-1$	−	|	−	0	+
$(1-3x)(x-1)$	−		+		+

Nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{3} \le x < 1$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $\frac{x+5}{(x-7)(3-4x)} < 0$

Giải

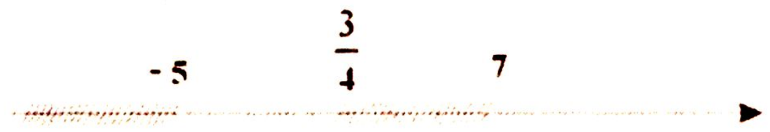
$x+5$ có nghiệm $x = -5$; $x-7$ có nghiệm $x = 7$

$3-4x$ có nghiệm $x = \frac{3}{4}$.

Ta có bảng xét dấu:

x		-5		$\frac{3}{4}$		7	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3-4x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
Thương	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$

Kết quả: $-5 < x < \frac{3}{4}$ hoặc $x > 7$



Chú ý: Dấu || chỉ rằng tại các giá trị $\frac{3}{4}$; 7 thì thương không xác đnh.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $\frac{1}{3-5x} > \frac{1}{2x+3}$ (1)

Giải

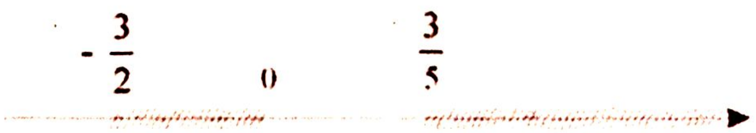
$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3-5x} - \frac{1}{2x+3} > 0$. Quy đồng mẫu thức, ta có:

$\frac{(2x+3)-(3-5x)}{(3-5x)(2x+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{(3-5x)(2x+3)} > 0$

Lập bảng:

x		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{5}$	
$7x$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$3-5x$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$	0	$+$	|	$+$
Thương	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	-

Kết quả: $x < -\frac{3}{2}$ hoặc $0 < x < \frac{3}{5}$



Dạng 5: Giải bất phương trình tích

Ví dụ 1: Giải bất phương trình: $x^2 - 2x + 1 < 9$.

Giải

Cách 1. $x^2 - 2x + 1 < 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 9 \Leftrightarrow |x-1| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4.$

Cách 2. Biến đổi thành bất phương trình dạng tích:

$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0.$

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x + 2$ và $x - 4$:

x		-2		4	
$x + 2$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x - 4$	$-$	|	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình là $-2 < x < 4$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình: $(2x+1)(3-2x)(1-x) > 0$

Giải

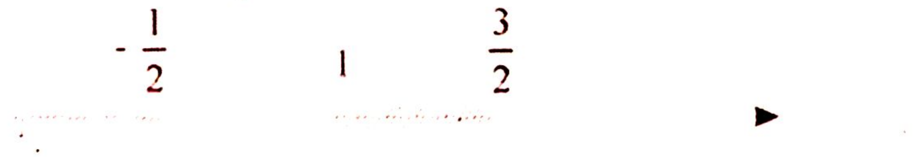
Ta lập bảng xét dấu: $2x + 1$ có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$

$3 - 2x$ có nghiệm $x = \frac{3}{2}$; $1 - x$ có nghiệm $x = 1$

x		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	
$2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$	|	$+$
$3 - 2x$	$+$	|	$+$		$+$	0	$-$
$1 - x$	$+$	|	$+$	0	$-$		$-$
Tích số	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là hai khoảng: $-\frac{1}{2} < x < 1; x > \frac{3}{2}$.

Biểu diễn trên trục số:



Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $x^2 - 5x + 6 < 0$ (1)

Giải

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Vậy (1) $\Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0$

Ta có bảng:

x		2		3	
$x - 2$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x - 3$	$-$	|	$-$		$+$
Tích	$+$	0	$-$	0	$+$

Kết quả: nghiệm của (1) là: $2 < x < 3$



Dạng 6: Giải bất phương trình dạng khác

Ví dụ 1 : Giải phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = x(y + z)$.

Giải:

Trước hết chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + xz$ (1)

Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + y^2 + z^2 \ge 0$ (2)

Xảy ra đẳng thức (2), tức là ở (1), khi và chỉ khi $x = y = z = 0$. Đó là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2 : Kí hiệu [a] (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm x biết rằng: $\left[\frac{3x-5}{7}\right] = x$.

Giải:

Theo đề bài, x là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{3x-5}{7}$.

Do đó $\left[\frac{3x-5}{7}\right] = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{3x-5}{7} - x < 1 & (1) \\ x \in Z & (2) \end{cases}$

Giải bất phương trình (1):

$0 \le \frac{-4x-5}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 \le -4x - 5 < 7 \Leftrightarrow 5 \le -4x < 12 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \ge x > -3.$

Theo (2), $x \in Z$ do đó $x = -2$.

Ví dụ 3 : Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để A > 0.

Giải

a. $A = \frac{2}{1-2x}$ với $x \ne \pm 1; x \ne \frac{1}{2}$.

b. A > 0 khi $x \ne -1 < \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4 : Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2-3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27-3x^2} + \frac{1}{x+3}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức B.

b. Tìm x để $B < -1$.

Giải

a. $B = -\dfrac{x+3}{x}$ với $x \neq 0, x \neq \pm 3$.

b. $B < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x+3}{x} < -1 \\ x \neq 0; x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{x} < 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Ví dụ 5 : Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau là số dương: $\dfrac{m+1}{x-1} = 1 - m$.

Giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1$. Đưa phương trình về dạng $(1-m)x = 2$.

Nếu $m = 1$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì $x = \dfrac{2}{1-m}$. Giải điều kiện $1 + m \neq 0$ được $m \neq -1$

Nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{2}{1-m}$ với $m \neq \pm 1$.

Phương trình có nghiệm là số dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$

Bài tập vận dụng

1. Giải bất phương trình: $\dfrac{ax+1}{a-1} > \dfrac{ax-1}{a+1}$ với $a > 1$.

2. Giải phương trình:

a. $|x| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$; b. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$;

c. $|x| - 2|x-1| + 3|x-2| = 4$; d. $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$.

3. Giải phương trình:

a. $x|x+3| - |x^2 + x + 1| = 1$;

b. $|x|^3 - 3|x| + 2 = 0$.

4. Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị của biến để biểu thức:

a) $A = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ có giá trị dương;

b) $B = \left(\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 8} . \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}\right) : \dfrac{4}{x+2}$ có giá trị âm.

5. Giải bất phương trình: $ax - b > bx + a$

6. Tìm các giá trị của x thỏa mãn cả hai bất phương trình:

a) $2x + 1 > x + 4$ và $x + 3 < 3x - 5$

b) $3x - 1 > x + 3$ và $4x + 1 < 6x - 9$

7. Ký hiệu [a] là số nguyên lớn nhất không vượt quá a (như vậy nếu $[a]=n$ thì n là số nguyên $0 \le a-n<1$)

Giải các phương trình:

a) $\left[\dfrac{3x+7}{12}\right]=x$; b) $\left[\dfrac{4x-1}{9}\right]=x$; c) $\left[\dfrac{3x+1}{5}\right]=2x-1$.

Hướng dẫn và đáp số

1. Nhân hai vế của bất phương trình với $(a-1)(a+1)>0$.

Đáp số: $x>-1$.

2. a. $\dfrac{9}{4}$ và $\dfrac{9}{2}$; b. -2; c. $x=4; 0\le x\le 1$.

d. Không nên máy móc xét các khoảng giá trị của x. Chú ý rằng vế trái của phương trình không âm nên vế phải không âm, do đó $x \ge 0$. Phương trình trở thành $x+1+x+2+x+3=4x$. Từ đó $x=6$.

3. a. Chú ý rằng $x^2+x+1>0$. Đáp số $x=1$.

b. Đặt $y=|x|>0$. Đáp số $x=\pm 1$.

4. a) $A=\dfrac{1}{x+2}$ với $x\ne 2$

$A>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}>0$ và $x\ne 2 \Leftrightarrow x>-2$ và $x\ne 2$.

b) $B=-\dfrac{1}{x+2}$ với $x\ne 2$. $B<0 \Leftrightarrow x>-2; x\ne 2$.

5. Nếu $a>b$ thì $x>\dfrac{a+b}{a-b}$

Nếu $a<b$ thì $x<\dfrac{a+b}{a-b}$

Nếu $a=b$ thì $0x>2b$, nghiệm đúng với mọi x nếu $b<0$, vô nghiệm nếu $b\ge 0$.

6. a) $3<x<4$; b) $x>5$.

7. a) Giải bất phương trình $0\le \dfrac{3x+7}{12}-x<1$ với x là số nguyên, ta được

$-\dfrac{5}{9}<x\le\dfrac{7}{9}$; và $x\in\mathbb{Z}$, do đó $x=0$.

b) $x=-1$.

c) Giải bất phương trình: $0\le\dfrac{3x+1}{5}-(2x-1)<1$ (1) với $2x-1\in\mathbb{Z}$ (2)

Nghiệm của (1) là $\dfrac{1}{7}<x\le\dfrac{6}{7}$. Từ đó $-\dfrac{5}{7}<2x-1\le\dfrac{5}{7}$.

Do (2) nên $2x-1=0$. Vậy $x=\dfrac{1}{2}$.

§7. Các bài toán về số học

Các kiến thức cơ bản

Tính chia hết

Định nghĩa: *Cho hai số nguyên a và b trong đó* $b \neq 0$. *Ta nói a chia hết cho b nếu thương của phép chia a cho b bằng một số nguyên k. Nói cách khác, số nguyên a chia hết cho số nguyên* $b \neq 0$ *nếu tìm được số nguyên k sao cho* $a = bk$.

Các tính chất về chia hết:

1. *Số 0 chia hết cho mọi số* $b \neq 0$.
2. *Nếu a chia hết cho b, b chia hết cho c thì a chia hết cho c (tính chất bắc cầu).*
3. *Nếu a và b cùng chia hết cho m thì* $a + b$ *chia hết cho m,* $a - b$ *chia hết cho m.*
4. *Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m, số kia không chia hết cho m thì* $a + b$ *không chia hết cho m,* $a - b$ *không chia hết cho m.*
5. *Nếu tổng hai số chia hết cho m và một trong hai số đó chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m.*
6. *Nếu a chia hết cho m, b chia hết cho n thì a.b chia hết cho m.n.*

 Hệ quả: *Nếu a chia hết cho b thì* a^n *chia hết cho* b^n.

 1. Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m.

 2. Nếu a chia hết cho m và n thì a chia hết cho BSCNN của m và n.

 Chứng minh: a chia hết cho m và n nên a là bội số chung của m và n. Do đó a chia hết cho BSCNN của m và n.

 Hệ quả: *Nếu a chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau m và n thì a chia hết cho mn.*

 Nếu ab chia hết cho m, trong đó b và m nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m.

 Chứng minh: Phân tích m ra thừa số nguyên tố: $m = a_1^{k_1}.a_2^{k_2}...a_n^{k_n}$ *(1)*

 Vì ab chia hết cho m nên ab chứa tất cả các thừa số nguyên tố $a_1, a_2, ..., a_n$ *với số mũ lớn hơn hoặc bằng số mũ của các thừa số nguyên tố trong (1) Nhưng b và m nguyên tố cùng nhau nên không chứa thừa số nguyên tố nào trong các thừa số* $a_1, a_2, ..., a_n$. *Do đó a chứa tất cả các thừa số* $a_1, a_2, ..., a_n$ *với số mũ lớn hơn hoặc bằng số mũ của các thừa số nguyên tố đó trong (1), tức là a chia hết cho m.*

 Hệ quả: *Nếu* a^n *chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p.*

 Các nhận xét sau cũng được dung trong những chứng minh về chia hết:

 1. Trong k số nguyên liên tiếp, có một bội số của k.

2. Khi chia một số nguyên n cho một số nguyên $m \neq 0$ xảy ra một trong m dạng sau: $n = mk$, $n = mk + 1$, $n = mk + 2$, ..., $n = mk + (m - 1)$ với k nguyên.

Sử dụng nguyên tắc Dirichlet

Nguyên tắc Đi- Rích- Lê (Dirichlet) mang tên một nhà toán học người Đức: Peter Gustav Dirichlet (1851-1931), còn gọi là Nguyên tắc lồng chim, Nguyên tắc thỏ và lồng.

Dạng phát biểu đơn giản nhất của nguyên tắc này là:

Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái lồng (n là số nguyên dương) thì chắc chắn có một lồng chứa ít nhất hai thỏ. Hoặc Nếu nhốt $q.n + 1$ con thỏ vào n cái lồng thì thế nào cũng có một lồng chứa ít nhất $q + 1$ con thỏ.

Nguyên tắc trên lần đầu tiên được Đi- Rích- Lê sử dụng một cách rõ ràng trong lý thuyết số. Tuy được phát biểu đơn giản nhưng nguyên tắc Đi- Rích- Lê lại có những ứng dụng hết sức bất ngờ và thú vị. Ta xét một số ví dụ để làm rõ hơn những ứng dụng của nguyên tắc Đi- Rích- Lê.

Ta chứng minh được : Trong ba số nguyên tùy ý, có ít nhất hai số có cùng tính chất chẵn lẻ. Trong bốn số nguyên tùy ý, có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và tổng quát: Trong $n + 1$ số nguyên tùy ý, có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho n.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1:Các bài toán chia hết

Dạng 2: Nguyên tắc Dirichlet

Dạng 3: Tìm số dư và chữ số tận cùng

Dạng 4 : Các bài toán khác

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Các bài toán chia hết

Ví dụ1 : Chứng minh rằng với mọi $n \in Z$: $A(n) = n(n^2 + 1)(n^2 + 4) \vdots 5$

Giải

Xét mọi trường hợp khi chia $n \in Z$ cho 5, ta có số dư là $r = 0, \pm1, \pm2$.

a. $r = 0 \Rightarrow n \vdots 5$

b. $r = \pm1 \Rightarrow n = 5k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 \Rightarrow n^2 + 1 \vdots 5$

c. $r = \pm2 \Rightarrow n = 5k \pm 2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 \Rightarrow n^2 + 4 \vdots 5$

A(n) là tích của ba thừa số, trong mọi trường hợp đều có một thừa số chia hết cho 5. Vậy $A(n) \vdots 5$, với mọi $n \in Z$ (đpcm).

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng:

a. Trong hai số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 2 .

b. Trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3

c. Trong k số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho k.

Giải

a. Hai số nguyên liên tiếp là n và n + 1.

Nếu n chia hết cho 2 thì n + 1 không chia hết cho 2.

Nếu n không chia hết cho 2 thì n + 1 chia hết cho 2.

b. Ba số nguyên liên tiếp là n, n + 1, n +2.

Nếu $n \vdots 3$ thì n + 1 và n + 2 không chia hết cho 3.

Nếu n không chia hết cho 3, thì chia n cho 3, ta có số dư là 1 hoặc 2:

$n = 3q + 1 \Rightarrow n + 2 = (3q + 3) \vdots 3$. Lúc đó n +1 không chia hết cho 3.

$n = 3q + 2 \Rightarrow n + 1 = (3q + 3) \vdots 3$. Lúc đó n + 2 không chia hết cho 3.

Như vậy: trong dãy ba số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng có một và chỉ một số chia hết cho 3 (đpcm).

c. k là số nguyên liên tiếp có dạng:n, n + 1, n + 2, ..., $n + k - 1$ (1)

Ta chứng minh hai phần:

1. Trong dãy (1), bao giờ cũng có một số chia hết cho k.

Thật vậy, số n có thể viết:

$n = kq + r$ với $0 \le r < k$ (r là số dư khi chia n cho k).

– Nếu r = 0 thì n chia hết cho k.

– Nếu $r \neq 0$, ta xét số: $n' = n + (k - r)$. Vì $0 < r < k$, nên $0 < k - r \le k - 1$,

Do đó n' là một số thuộc dãy (1).

$n' = n + (k - r) = (kq + r) + k - r = k(q + 1) \vdots k$.

Nghĩa là nếu $r \neq 0$ thì $n' = n + (k - r)$ chia hết cho k.

2. Trong dãy (1) chỉ có một số chia hết cho k.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử trong dãy (1) có hai số m và p cùng chia hết cho k, và giả sử m > q. Thế thì hiệu của $m - p$ cũng chia hết cho k. Trong dãy (1), hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất: $0 < m - p \le k - 1$. Và số $m - p$ này không thể chia hết cho k. Mâu thuẫn đó ($m - p$ chia hết cho k, đồng thời lại không chia hết cho k) chứng tỏ trong dãy (1) có nhiều nhất là một số chia hết cho k. Từ hai phần a) và b) ta kết luận được:

Trong k số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho k (đpcm).

Ví dụ 3 :. Chứng minh rằng:

a. Tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

b. Tích của 4 số nguyên liên tiếp chia hết cho bao nhiêu?

Giải

a. Gọi ba số nguyên liên tiếp là n, n + 1 và n + 2. Tích của chúng là:
$A(n) = n(n+1)(n+2)$. Ta có 6 = 2.3 (2 và 3 là số nguyên tố).

Trong hai số nguyên liên tiếp n và n + 1, bao giờ cũng có một số chẵn, do đó $A(n) \vdots 2$. Trong ba số nguyên liên tiếp n, n + 1 và n + 2 bao giờ cũng có một số chia hết cho 3 , nên tích của chúng luôn chia hết cho 3: $A(n) \vdots 3$

$A(n) \vdots 2$ và $A(n) \vdots 3$, mà (2, 3) = 1 nên $A(n) \vdots 2.3 = 6$ (đpcm).

Chú ý rằng: ba số nguyên liên tiếp có thể là $n-1, n$ và n + 1, như vậy ta có: $(n-1)n(n+1) = n(n^2-1) = n^3 - n$ chia hết cho 6.

b. $A(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$

Trước hết, ta thấy rằng trong bốn số nguyên liên tiếp: n, n + 1, n + 2, n + 3, bao giờ cũng có một số chia hết cho 2 và một số khác chia hết cho 4.
Thật vậy: Nếu: n = 2k thì $n + 2 = 2k + 2 = 2(k+1)$

Do đó: Khi k chẵn thì $n \vdots 4$ còn $n + 2 \vdots 2$. Khi k lẻ thì $n + 2 \vdots 4$ còn $n \vdots 2$
Tương tự như vậy, nếu xét n + 1= 2k thì trong hai số n + 1 và n + 3 có một số chia hết cho 4, số kia chia hết cho 2.
Do đó $A(n) = n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 2.4 = 8$

Theo a) thì $n(n+1)(n+2) \vdots 3$. Mà (3, 8) = 1 nên $A(n) \vdots 3.8 = 24$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

Giải

Gọi số chẵn thứ nhất là 2n, số chẵn tiếp theo là 2n + 2
Tích của chúng là $A(n) = 2n(2n+2)$. Ta có: 8 = 4. 2

Do đó ta viết: $A(n) = 4.n(n+1)$. A(n) là tích của hai thừa số: một thừa số là 4, chia hết cho 4 và một thừa số là n(n + 1) chia hết cho 2.
Vì vậy $A(n) = 4.n(n+1) \vdots 4.2 = 8$ (đpcm).

Ví dụ 5 : Chứng minh rằng lập phương của một số nguyên n bất kì (n > 1) trừ đi 13 lần số nguyên đó thì luôn chia hết cho 6.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II toàn quốc, 1970)

Giải

Ta phải chứng minh: $A(n) = n^3 - 13n \vdots 6$

Chú ý rằng: $13n = 12n + n$, mà $12n \vdots 6$, ta biết đổi A(n) thành:

$A(n) = (n^3 - n) - 12n$.

Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$

Đây là tích của ba số nguyên liên tiếp, tích này luôn chia hết cho 6. A(n) là hiệu của hai hạng tử: $n^3 - n$ và 12n, mỗi hạng tử chia hết cho 6, nên $A(n) \vdots 6$(đpcm).

Ví dụ 6 : Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9.

Giải

Ba số nguyên liên tiếp là n, n + 1, n + 2, ta phải chứng minh:

$A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9.

Ta có: $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$

$= 3n^3 - 3n + 18n + 9n^2 + 9 = 3n(n-1)(n+1) + 18n + 9 + 9n^2$

$n, n-1, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp, trong đó một số chia hết cho 3

Vậy: $B = 3n(n-1)(n+1) \vdots 9; C = 18n + 9n^2 + 9 \vdots 9$

A= B + C mà $B \vdots 9$, $C \vdots 9$ nên $A \vdots 9$.

Chú ý: *Để chứng minh một tổng không chia hết cho m, ta chứng minh một hạng tử nào đó không chia hết cho m, còn tất cả các hạng tử khác đều chia hết cho m.*

Ví dụ 7: Chứng minh rằng: $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8 với mọi số n lẻ.

Giải

Đặt $n = 2k + 1$, ta có: $n^2 + 4n + 5 = (2k+1)^2 + 4(2k+1) + 5$

$= (4k^2 + 4k + 1) + (8k + 4) + 5 = (4k^2 + 4k) + (8k + 8) + 2$

$= 4k(k+1) + 8(k+1) + 2$. Đây là tổng của ba hạng tử, hạng tử đầu $4k(k+1)$ chia hết cho 8 , hạng tử thứ hai $8(k+1)$ cũng chia hết cho 8, riêng hạng tử thứ ba là 2 không chia hết cho 8. Vậy tổng đã cho không chia hết cho 8.

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p −1)(p + 1) chia hết cho 24.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003-2004

Giải :

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ , không chia hết cho 3. Do đó $p = 2k + 1 (k \in Z, k > 1)$ suy ra A = (p − 1)(p + 1) = 2k (2k + 2) = 4k (k + 1) suy ra A chia hết cho 8.

$p = 3h \pm 1 (h \in Z, h > 1)$ suy ra A chia hết cho 3.

Vậy A = (p−1)(p + 1) chia hết cho 24.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng số: $n^n - n^2 + n - 1$ chia hết cho $(n-1)^2$, với mọi số nguyên n > 1.

(Đề thi vô địch New York, 1975)

Giải

Với n = 2 thì ... $n^n - n^2 + n - 1 = 1$ chia hết cho $(n-1)^2 = (2-1)^2 = 1$

Với n > 2, ta có: $A = n^n - n^2 + n - 1$

$= (n^{n-2} - 1)n^2 + (n-1) = (n-1)(n^{n-3} + ... + 1)n^2 + (n-1)$

$= (n-1)(n^{n-1} + ... + n^2 + 1)$.

Xét tổng $B = n^{n-1} + ... + n^2 + 1$; B có $n-1$ số hạng, ta có thể viết:

$B = (n^{n-1} - 1) + (n^{n-2} - 1) + ... + (n^2 - 1) + (1-1) + (n-1)$

Mỗi hiệu trong dấu ngoặc đều chia hết cho $(n-1)$ do đó B chia hết cho $n-1$. Vì vậy: $A = (n-1)B$ chia hết cho $(n-1)^2$, đpcm.

Ví dụ 10 : Chứng minh rằng các số có dạng: $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ với n chẵn và lớn hơn 4 thì chia hết cho 384.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II miền Bắc, 1971).

Giải

Ta phân tích biểu thức đã cho ra nhân tử:

$A = n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$

$= (n^4 - 4n^3) - (4n^2 - 16n) = n^3(n-4) - 4n(n-4)$

$= n(n-4)(n^2 - 4) = n(n-2)(n+2)(n-4)$

Vì n chẵn và lớn hơn 4 nên ta đặt $n = 2k + 2$ $(k > 1)$ và biểu diễn theo k, ta có: $A = (2k+2)(2k)(2k+4)(2k-2)$

$= 16k(k-1)(k+1)(k+2) = 16(k-1)(k)(k+1)(k+2)$. Ta nhận thấy $(k-1)(k)(k+1)(k+2)$ là tích của bốn số nguyên dương liên tiếp, tích này chia hết cho $2.3.4 = 24$.

Vậy tích A đã cho chia hết cho: $16.2.3.4 = 384$ (đpcm).

Ví dụ 11: Chứng minh: $2^{4n} - 1$ chia hết cho 15.

Giải

$$2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1^n = (2^4 - 1)\left[(2^4)^{n-1} + ... + 1\right] = 15.M$$

Vậy $2^{4n} - 1 \vdots 15$.

Ví dụ 12: Chứng minh rằng tổng: $A = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^4k$

(trong đó k là số tự nhiên chia hết cho 400).

Giải

Hãy nhóm các hạng tử của tổng đã cho theo cách:

$A = \left(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4\right) + \left(7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8\right) + ... + \left(7^{4k-3} + 7^{4k-2} + 7^{4k-1} + 7^{4k}\right)$

$= \left(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4\right) + 7^4\left(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4\right) + 7^{4k-4}\left(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4\right)$

$= \left(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4\right)\left(1 + 7^4 + 7^8 + ... + 7^{4k-4}\right)$

$= 7\left(1 + 7 + 49 + 343\right)(1 + 7^4 + 7^8 + ... + 7^{4k-4}) = 7.400.M$

Vậy $A \vdots 400$.

Ví dụ 13: Chứng minh biểu thức: $A = 75(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 5) + 25$ chia hết cho 4^{1976}

(Đề thi vào chuyên toán Hà Nội 1976 – vòng 1)

Giải:

$A = 25.3\left(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 4 + 1\right) + 25$

$= 25.(4 - 1)\left(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 4 + 1\right) + 25$

Áp dụng hằng đẳng thức , ta có: $A = 25(4^{1976} - 1) + 25 = 25.4^{1976}$

Vậy $A \vdots 4^{1976}$.

Ví dụ 14: Tìm số nguyên n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B: $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$, $B = n^2 - n$

Giải:

Đặt phép chia: $(n^3 + 2n^2 - 3n + 2) : (n^2 - n)$

$$n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = \left(n^2 - n\right)\left(n + 3\right) + 2$$

Muốn chia hết, ta phải có 2 chia hết cho $n\left(n - 1\right)$, do đó 2 chia hết cho n.

Ta có:

n	1	−1	2	−2
$n - 1$	0	−2	1	−3
$n\left(n - 1\right)$	0	2	2	6
	loại			loại

Đáp số: $n = -1$, $n = 2$.

Chú ý:

a) *Không thể nói đa thức A chia hết cho đa thức B. Ở đây chỉ tồn tại những giá trị nguyên của n để giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.*

b) Có thể thay việc đặt phép chia bằng cách biến đổi:

$$n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = n(n^2 - n) + 3(n^2 - n) + 2$$

Ví dụ 15: Tìm số nguyên dương n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$.

Giải:

Biến đổi: $n^5 + 1 \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \vdots n^3 + 1$

$\Leftrightarrow (n+1)(n-1) \vdots (n+1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow n - 1 \vdots n^2 - n + 1$ (vì $n + 1 \neq 0$).

Nếu $n = 1$ thì ta được 0 chia hết cho 1.

Nếu $n > 1$ thì $n - 1 < n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$, do đó $n - 1$ không thể chia hết cho $n^2 - n + 1$. Có hai trường hợp:

a. $n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n-1) = 0 \Leftrightarrow n = 0; n = 1$. Các giá trị này thỏa mãn đề bài.

b. $n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0$. Vô nghiệm.

Vậy $n = 0,\ n = 1$ là hai số phải tìm.

Chú ý: Từ $n - 1 \vdots n^2 - n + 1$ *suy ra* $n(n-1) \vdots n^2 - n + 1$ *là phép kéo theo chứ không là phép biến đổi tương đương. Do đó sau khi tìm được* $n = 0,\ n = 1$ *thì phải thử lại.*

Ví dụ 16: Tìm số tự nhiên n sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Giải:

Nếu $n = 3k\ (k \in N)$ thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7.

Nếu $n = 3k + 1\ (k \in N)$ thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = BS\ 7 + 1$

Nếu $n = 3k + 2\ (k \in N)$ thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = BS\ 7 + 3$

Vậy $2^n - 1$ chia hết cho 7 $\Leftrightarrow n = 3k\ (k \in N)$.

Dạng 2: Nguyên tắc Dirichlet

Ví dụ 1: Một bà già chiều con, ngày nào cũng cho con ít nhất một chiếc kẹo. Để hạn chế, tuần bà cho không quá 12 chiếc kẹo. Chứng minh rằng trong một số ngày liên tiếp nào đó bà mẹ đã cho con tổng số 20 chiếc kẹo.

Giải:

Cách 1: Xét 11 tuần liên tiếp. Gọi S(n) là tổng số kẹo mà bà mẹ đã cho con tính đến ngày thứ n $(1 \le n \le 77)$. Xét 154 số sau:

$S(1),\ S(2),\ \ldots\ S(77);\ S(1) + 20,\ S(2) + 20,\ \ldots\ S(77) + 20$

Vì mỗi ngày bà mẹ cho con ít nhất 1 chiếc kẹo nên $S(k) \ge 1,\ \forall k = 1, 2, \ldots 77$ và mỗi tuần bà mẹ cho con không quá 12 chiếc kẹo nên: $S(k) \le 11 \ .\ 12 = 132,\ \forall k = 1,\ 2, \ldots,\ 77$

Dễ thấy $S(k) \neq S(m),\ \forall\ k \neq m$. Mặt khác, có 154 số chỉ nhận giá trị không quá 152 giá trị nên tồn tại hai số bằng nhau. Vậy tồn tại k, m sao

cho $S(k)=S(m)+20$ hay $S(k)-S(m)=20$. Vậy kể từ ngày thứ $m+1$ đến ngày thứ k bà mẹ đã cho con đúng 20 chiếc kẹo.

Cách 2: Xét 21 ngày liên tiếp kể từ ngày nào đó. Gọi $S(n)$ là tổng số kẹo mà bà mẹ đã cho con tính đến ngày thứ n $(1 \le n \le 21)$.

Ta có: $S(m) \ne S(n),\ \forall\ m \ne n(1 \le m,\ n \le 21)$ và $1 \le S(n) \le 3\ .\ 12 = 36$

Vì có 21 tổng nên $\exists\ m > n(1 \le m,\ n \le 21)$ sao cho:

$$S(m) \equiv S(n)(\text{mod}\,20) \Rightarrow S(m)-S(n)\ \vdots\ 20$$

$$\Rightarrow S(m)-S(n)=20\ (\text{vì } 0 < S(m)-S(n) < 36)$$

Như vậy, kể từ ngày thứ $n+1$ đến ngày thứ m, bà mẹ đã cho con đúng 20 chiếc kẹo.

Ví dụ 2: Trong một tam giác đều cạnh bằng 1 (kể cả trên các cạnh), ta đặt 17 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$.

Giải:

Chia tam giác đã cho thành 16 tam giác đều nhỏ, cạnh có độ dài bằng $\frac{1}{4}$.

Theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại ít nhất hai điểm nằm trong cùng một hình tam giác nhỏ. Hai điểm này có khoảng cách bé hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 3: Trong một cuộc giao lưu, mỗi người đều bắt tay với ít nhất một người khác. Chứng minh rằng có ít nhất hai người có cùng số lần bắt tay.

Giải:

Giả sử trong cuộc giao lưu đó có n người. Vì số lần bắt tay của mỗi người nằm trong khoảng từ 1 đến $n-1$ nên có ít nhất hai người có số lần bắt tay bằng nhau.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 6 và chia hết cho 2003.

Giải:

Xét 2004 số có dạng: 6, 66, 666, …, 666..6. Theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2003. Giả sử hai số đó là:

$$A = \underbrace{66...6}_{n} \text{ và } B = \underbrace{66...6}_{k} \text{ với } k < n$$

Khi đó, $A - B = \underbrace{66...6}_{n-k}.10^6$ chia hết cho 2003.

Vì $(2003,\ 10^k)=1$ nên $C = \underbrace{66...6}_{n-k}$ chia hết cho 2003.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng trong 52 số nguyên dương bất kì ta luôn tìm được hai số sao cho tổng hoặc hiệu của hai số đó chia hết cho 100.

Giải:

Cách 1: Nếu có hai số có cùng số dư khi chia hết cho 100 thì bài toán được giải. Giả sử không có hai số nào cùng số dư khi chia cho 100. Khi đó, có ít nhất 51 số khi chia cho 100 có số dư khác 50 là $a_1, a_2, ..., a_{51}$. Đặt $b_i = -a_i (1 \le i \le 51)$. Xét 102 số: a_i và b_i. Theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại $i \neq j$ sao cho $a_i \equiv b_j (\bmod 100)$. Suy ra $a_i + a_j$ chia hết cho 100.

Cách 2: Cũng như ở cách 1, nếu có hai số cùng chia hết cho 100 thì ta có điều phải chứng minh. Giả sử có ít nhất 51 số không chia hết cho 100. Xét các cặp: $(1, 99)$, $(2, 98)$, ..., $(49, 51)$, $(50, 50)$. Suy ra có hai số mà số dư của chúng khi chia cho 100 cùng rơi vào một cặp và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6 : Chứng minh rằng:

a. Trong 11 số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có cùng chữ số tận cùng giống nhau.

b. Trong m + 1 số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có hiệu chia hết cho m.

Giải

a. Một số nguyên chỉ có thể tận cùng bằng 1 trong 10 chữ số: 0, 1, 2, …,9. Lấy 11 số nguyên, theo nguyên tắc Dirichlet, phải có hai số có cùng chữ số tận cùng giống nhau.

b. Chia một số cho m thì ta có số dư là một trong m số: 0, 1, 2, …, $m-1$. Do đó theo nguyên tắc Dirichlet chia m + 1 số cho m thì phải có ít nhất hai số cho cùng số dư. Hiệu của hai số này chia hết cho m (đpcm).
Chú ý rằng: câu a) là trường hợp đặc biệt của câu b) khi cho m = 10 (chữ số tận cùng của mỗi số biểu diễn số dư khi chia số đó cho 10).

Ví dụ 7: a. Chứng minh rằng trong m số nguyên bất kì, bao giờ cũng có một số chia hết cho m hoặc ít nhất hai số có tổng chia hết cho m.

b. Có hay không có một số có dạng: 19911991…1991000000 chia hết cho 1990?

Giải.

a. Gọi m số nguyên đã cho là $a_1, a_2, ..., a_m$. Ta lập m tổng:

$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$

$... S_m = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m$

Có tất cả hai trường hợp:

– Một trong các tổng trên chia hết cho m. Đó là điều phải chứng minh.

– Không có một tổng nào trong các tổng trên chia hết cho m; như vậy số dư khi chia mỗi tổng trên cho m là một số từ 1 đến $m-1$ (có tất cả $m-1$ số dư). Ta có m tổng, do đó theo nguyên tắc Dirichlet, phải có hai tổng có cùng số dư ($\neq 0$) khi chia cho m. Hiệu của hai tổng này (là tổng của một số các số đã cho) chia hết cho m (đpcm).

b. Ta lập 1990 số có dạng:

1991

1991 1991

1991 1991 1991

...

1991 1991 ... 1991

(bốn chữ số 1, 9, 9, 1 được lặp lại 1990 lần)

Chia các số trên đây cho 1990, ta có 1989 số dư khác 0. Theo nguyên tắc Dirichlet, phải có ít nhất hai số cho cùng một số dư, hiệu hai số này (là một số có dạng 1991 1991 ... 0000) chia hết cho 1990 (đpcm).

Ví dụ 8: Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II toàn quốc, 1983)

Giải

Cho k lần lượt lấy $10^5 + 1$ giá trị liên tiếp, từ 1 trở đi, ta được $10^5 + 1$ giá trị khác nhau của $1983^k - 1$. Chia $10^5 + 1$ số này cho 10^5, ta chỉ có nhiều nhất là 10^5 số dư; vì vậy theo nguyên tắc Dirichlet, phải có ít nhất hai số cho cùng số dư khi chia cho 10^5. Giả sử số đó là $1983^m - 1$ và $1983^n - 1$ $(m > n)$. Thế thì hiệu của hai số này phải chia hết cho 10^5:

$\left(1983^m - 1\right) - \left(1983^n - 1\right)$ chia hết cho 10^5.

Mà $\left(1983^m - 1\right) - \left(1983^n - 1\right) = 1983^m - 1983^n = 1983^n\left(1983^{m-n} - 1\right)$

Nhưng có 10^5 và 1983^n nguyên tố cùng nhau, do đó phải có $1983^{m-n} - 1$ chia hết cho 10^5. Như vậy là có số $k' = m - n$ sao cho $1983^{k'} - 1$ chia hết cho 10^5 (đpcm).

Dạng 3: Tìm số dư và chữ số tận cùng

Ví dụ 1: Chứng minh rằng tồn tại một bội số của 2003 có dạng:

$$\underbrace{20042004...2004}_{k}$$

Giải:

Xét 2004 số: $a_1 = 2004$; $a_2 = 20042004$ ...

$a_{2004} = 20042004....2004$ (nhóm 2004 có mặt 2004 lần)

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số có cùng số dư khi thực hiện phép chia cho 2003.

Gọi hai số đó là a_m và a_n $(1 \le n < m \le 2004)$ thì $a_m - a_n \vdots 2003$.

Ta có: $a_m - a_n = 2004...20040000...0000 = \underbrace{2004\ ...\ 2004}_{m-n} . 10^{4n}$

Do 10^{4n} và 2003 nguyên tố cùng nhau nên $\underbrace{2004\ ...\ 2004}_{m-n}$ chia hết cho 2003.

Ví dụ 2: Tìm số dư khi chia 2^{100}:

a. Cho 9; b. Cho 25; c. Cho 125

Giải:

a. Lũy thừa của 2 sát với một bội số của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có $2^{100} = 2(2^3)^{33} = 2(9-1)^{33} = 2(BS\ 9 - 1) = BS\ 9 - 2 = BS\ 9 + 7$

Số dư khi chia 2^{100} cho 9 là 7.

b. Lũy thừa của 2 sát với một bội số của 25 là $2^{10} = 1024 = BS\ 25 - 1$.

Ta có $2^{100} = (2^{10})^{10} = (BS\ 25 - 1)^{10} = BS\ 25 + 1$

Số dư khi chia 2^{100} cho 25 là 1

c. Dùng công thức Niu- tơn:

$$2^{100} = (5-1)^{50} = 5^{50} - 50.5^{49} + \ ...\ + \frac{50.49}{2}.5^2 - 50.5 + 1$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niu-tơn thì 48 số hạng đầu đã chứa lũy thừa của 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên chia hết cho 125. Hai số hạng tiếp theo cũng chia hết cho 125, số hạng cuối cùng là 1. Vậy $2^{100} = BS\ 125 + 1$.

Số dư khi chia 2^{100} cho 25 là 1

Chú ý: *Tổng quát hơn, ta chứng minh được rằng nếu một số tự nhiên không chia hết cho 5 thì chia* n^{100} *cho 125 ta được số dư là 1.*

Thật vậy, n có dạng $5k \pm 1$ *hoặc* $5k \pm 2$. *Ta có:*

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \ ...\ + \frac{100.99}{2}(5k)^2 \pm 100.5k + 1 = BS\ 125 + 1$$

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm \ ...\ + \frac{100.99}{2}(5k)^2.2^{98} \pm 100.5k.2^{99} + 2^{100}$$

$$= BS\ 125 + 2^{100}$$

Ta lại có: $2^{100} = BS\ 125 + 1$. *Do đó* $(5k \pm 2)^{100} = BS\ 125 + 1$.

Ví dụ 3 : Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} khi viết trong hệ thập phân

Giải:

Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} là tìm số dư khi chia 2^{100} cho 1000. Trước hết tìm số dư khi chia 2^{100} cho 125. Theo ví dụ 2 ta có $2^{100} = BS\ 125 + 1$, mà 2^{100} là số chẵn, nên ba chữ số tận cùng cả nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876.

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 8. Trong bốn số trên chỉ có 376 chia hết cho 8.

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

Chú ý. *Bạn dọc tự chứng minh rằng nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của* n^{100} *là 376.*

Ví dụ 4: Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} khi viết trong hệ thập phân.

Giải:

Cách 1: $5^4 = 625$. Ta thấy số tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625 (chỉ kiểm tra:$...0626 \times ...0625 = ...0625$)

Do đó: $5^{1994} = 5^{4k+2} = 25\left(5^4\right)^k = 25(0625)^k = 25(...0625) = ...5625$.

Cách 2: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4.5^4$

Nhận xét: $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = \left(5^2 - 1\right)\left(5^2 + 1\right)$ nên chia hết cho 16. Ta có: $5^{1994} = 5^6\left(5^{1988} - 1\right) + 5^6$.

Do 5^6 chia hết cho 5^4, còn $5^{1988} - 1$ chia hết cho 16 (theo nhận xét trên) nên $5^6\left(5^{1988} - 1\right)$ chia hết cho 10000. Tính 5^6, ta được 15625. Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625.

Chú ý: *Nếu* $5^{1994} = 5^2\left(5^{1992} - 1\right) + 5^2$ *thì ta có* $5^{1992} - 1$ *chia hết cho 16, nhưng* 5^2 *không chia hết cho* 5^4. *Như vậy trong bài toán này, ta cần viết* 5^{1994} *dưới dạng* $5^n\left(5^{1994-n} - 1\right) + 5^n$ *sao cho* $n \geq 4$ *và* $1994 - n$ *chia hết cho 4.*

Ví dụ 5: Tìm ba chữ số tận cùng của 3^{100}.

Giải:

$$3^{100} = (10-1)^{50} = 10^{50} - ... + \frac{50.49}{2}.10^2 - 50.10 + 1$$

$$= BS\ 1000 + ...\ BS500 - 500 + 1 = BS\ 1000 + 1.$$

Vậy 3^{100} có tận cùng là 001.

Chú ý: Tổng quát, ta chứng minh được rằng nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} *là 001.*

Trước hết, ta thấy một số n không chia hết cho 5 thì chia cho 125 có số dư bằng 1. Điều này đã được chứng minh ở chú ý của ví dụ 2. Ở đây, do có thêm điều kiện n là số lẻ nên còn có thể chứng minh bằng cách sau:

n tận cùng bằng 1, 3, 7, 9 $\Rightarrow$ n^4 *tận cùng bằng 1.*

$$\Rightarrow n^{100} = \left(n^4\right)^{25} = \left(10k+1\right)^{25}$$

$$= BS\ 1000 + \frac{25.24}{2}\left(10k\right)^2 + 25.10k + 1 = BS\ 125 + 1 \quad (1)$$

Ta có $n^{100} = \left(n^{50}\right)^2$ *là số chính phương lẻ (vì n lẻ) nên chia cho 8 dư 1 (2)*

Từ (1)và (2) suy ra $n^{100} - 1$ *chia hết cho 1000, tức là tận cùng bằng 001.*
Từ kết quả này, ta còn suy ra: Nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì n^{101} *và n có ba chữ số tận cùng như nhau.*

Ví dụ 6: Cho $ab = 455^{12}$. Tìm số dư trong phép chia $a+b$ cho 4.

Giải:

Cách 1: Ta thấy $455^{12} = \left(BS\ 4 - 1\right)^{12} = BS\ 4 + 1$. Do đó, a và b chia cho 4 cùng dư 1 hoặc cùng dư 3. Trong cả 2 trường hợp trên, $a+b$ chia cho 4 dư 2.

Cách 2: Xét biểu thức $ab + a + b + 1 = a\left(b+1\right) + \left(b+1\right) = \left(b+1\right)\left(a+1\right)$

Do a và b lẻ nên $\left(b+1\right)\left(a+1\right)$ chia hết cho 4, tức là:

$\left(ab+1\right) + \left(a+b\right)$ chia hết cho 4 (1)

Ta thấy: $ab = 455^{12} = \left(BS\ 4 - 1\right)^{12} = BS\ 4 + 1 \Rightarrow ab + 1 = BS\ 4 + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b = BS\ 4 + 2$.

Ví dụ 7: Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) 3^{999} b) 7^{7^7}

Giải:

a) $3^{999} = 3.3^{998} = 3\left(10-1\right)^{499} = 3\left(10^{499} - ... + 499.10 - 1\right)$

$= 3\left(BS\ 100 + 4989\right) = ...67$

b) Xét số mũ $7^7 = \left(8-1\right)^7 = BS\ 8 - 1 = 4k + 3$. Ta có:

$$7^{7^7} = 7^{4k+3} = 7^3.\left(7^4\right)^k = 343.(...01)^k = (...43)(..01) = ...43$$

Dạng 4 : Các bài toán khác

Ví dụ 1: Chứng minh rằng số: $19.8^n + 17$ là hợp số với mọi số tự nhiên n.

(Đề thi vô địch toán Anh, 1976)

Giải

Xét các trường hợp: n = 2k, n = 4k + 1 và n = 4k + 3.

a. $n = 2k$: $A = 19.8^{2k} + 17 = 18.8^{2k} + 8^{2k} + (18 - 1)$

Mà $8^{2k} = 64^k = (63 + 1)^k$, $63 = 3.21$ nên 8^{2k} chia 3 dư 1. Suy ra $A \vdots 3$

b. $n = 4k + 1$; $A = 19.8^{4k+1} + 17$

$= 13.8^{4k+1} + 6.8.64^{2k} + 17 = 13.8^{4k+1} + 39.64^{2k} + 9(1 - 65)^{2k} + (13 + 4)$

Chú ý rằng: $65 = 135.(1 - 65)^{2k}$ chia cho 3 dư 1, ta có: $A \vdots 13$.

c. $n = 4k + 3$, ta có $A = 19.8^{4k+3} + 17 = 15.8^{4k+3} + 4.8^3.64^{2k} + 17$

$= 15.8^{4k+3} + 4.510.64^{2k} + 4.2(1 - 65)^{2k} + (25 - 8)$. Suy ra $A \vdots 8$.

Ví dụ 2 : Xác định giá trị k để đa thức:

$f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ chia hết cho đa thức: $g(x) = x^2 - x - 2$

Giải

Cách 1: Lấy f(x) chia cho g(x) để tìm số dư và đạt số dư bằng 0 để tìm k.

Ta có: $x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k = (x^2 - x - 2)(x^2 - 8x + 15) + k + 30$

f(x) chia hết cho g(x) thì cần và đủ là: $r(x) = k + 30 = 0 \Rightarrow k = -30$.

Cách 2: Ta có: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

Như vậy nếu f(x) chia hết cho $x^2 - x - 2$, thì cũng chia hết cho $(x - 2)(x + 1)$. Áp dụng định lý Bezout và định nghĩa phép chia hết, ta thay $x = -1$ vào f(x): $f(-1) = 1 + 9 + 21 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -30$

Ví dụ 3 : Tìm tất cả các số tự nhiên k để cho đa thức: $f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$ chia hết cho nhị thức: $g(k) = k + 3$.

Giải

Cách 1: $k^3 + 2k^2 + 15 = (k + 3)(k^2 - k + 3) + 6$. Để f(k) chia hết cho k + 3 thì cần và đủ là 6 chia hết cho k + 3. Nếu k là số tự nhiên thì $k + 3 \geq 3$ vì thế 6 chia hết cho k + 3 khi và chỉ khi k = 0 hoặc k = 3.

Cách 2: Áp dụng định lý Bezout, chia f(k) cho $g(k) = k - (-3)$ ta tìm được số dư: $f(-3) = -27 + 18 + 15 = 6$. Số dư này phải chia hết cho k +3.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng với p là số nguyên tố lớn hơn 2 thì giá trị m trong phân số : $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} (m \in N; n \in N)$, chia hết cho p.

Giải:

Do p là số nguyên tố nên p – 1 là số chẵn , suy ra

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{p-1}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$$

$$=\frac{p}{1.(p-1)}+\frac{p}{2.(p-2)}+\frac{p}{3.(p-3)}+\ldots+\frac{p}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

$$=p\left[\frac{1}{1.(p-1)}+\frac{1}{2.(p-2)}+\frac{1}{3.(p-3)}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)}\right]$$

Ta có $1.(p-1).2.(p-2)\ldots\frac{p-1}{2}.\frac{p+1}{2}=(p-1)!$ suy ra $\frac{m}{n}$ có dạng

$\frac{m}{n}=p\frac{q}{(p-1)!}\Rightarrow m(p-1)!=npq\Rightarrow m(p-1)!$ chia hết cho p mà $(p-1)!$

không chia hết cho p , nên m chia hết cho p.

Ví dụ 5: Với 8 số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 3.

Giải :

Ký hiệu số tự nhiên thoả đề bài là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Các số a_1, $a_2,\ldots,$ a_6 khác nhau lấy từ 8 số đã cho, $a_1\neq 0$

- $a_1=3$, khi đó a_2 có 7 cách chọn, sau đó a_3 có 6 cách chọn,...

  Do đó trường hợp này có: $7.6.5.4.3=2520$ (số).

- $a_1\neq 3$ khi đó có 6 cách chọn a_1 (vì $a_1\neq 0$, $a_1\neq 3$), chọn số 3 thay vào 1 trong 5 số $a_2,\ldots,$ a_6, sau đó còn lại 4 chữ số và lần lượt chọn 4 số khác nhau lấy từ 8 số đã cho và khác a_1, a_2.

  Do đó trường hợp này có: $6.5.6.5.4.3=10800$ (số).

- Đáp số: 13320 số.

Ví dụ 6: Cho $2^n=10a+b$. Chứng minh rằng nếu $n>3$ thì tích số a, b chia hết cho 6. Ở đây a, b, n là các số nguyên dương và $b<10$.

(Đề thi học sinh giỏi toàn quốc 1984)

Giải

Cách 1: – Từ các giả thiết ta suy ra b chỉ có thể nhận các giá trị 2, 4, 6, 8.

Với b = 2

$a=\frac{2^n-2}{10}$: a là số nguyên nên n phải có dạng $n=4k+1$

Vì n > 3 nên n chỉ có thể lấy các giá trị từ 5 trở lên.

Ta được: $a = \dfrac{2^{4k+1} - 2}{10}$. Nếu a.b⋮6 mà b = 2 thì a phải chia hết cho 3 và $\left(2^{4k+1} - 2\right)$ phải chia hết cho 30.

Chứng minh $\left(2^{4k+1} - 2\right) \vdots 30$ bằng phương pháp qui nạp.

– Các trường hợp b = 4, b = 8 cũng tương tự.

– Trường hợp b = 6 thì mệnh đề trên hiển nhiên đúng.

Cách 2: Hãy xét hai trường hợp:

a. Trường hợp n là số chẵn , n = 2k ($k \geq 2$)

$2^n = 10a + b \Leftrightarrow 2^{2k} = 10a + b$

* Suy ra b là số chẵn.

* $\left(2^{2k}\right) = \left(2^k\right)^2$ là số chính phương chẵn nên nó phải tận cùng bằng số chẵn, b chỉ có thể là 4 hoặc 6.

– Với b = 6: mệnh đề hiển nhiên đúng.

– Với $b = 4 \Rightarrow 2^{2k} = 10a + 4 \Rightarrow 4^k = 10a + 4$

Vì $4^k = (3+1)^k = 3M + 1$ nên 4^k chia cho 3 còn dư 1. Vậy $\left(4^k - 4\right) \vdots 3$ suy ra 10a⋮3 hay a⋮3.

b. Trường hợp b là số lẻ: $n = 2r + 1 (r \geq 2) \Rightarrow 2^n = 10a + b \Leftrightarrow 2^{2r+1} = 10a + b$

2^{2r} chỉ tận cùng bằng 4 hoặc 6 nên 2^{2r+1}2 chỉ có thể tận cùng bằng 8 hoặc 2 hay b chỉ nhận giá trị 2 hoặc 8.

– Với b = 2 thì 2^{2r} chia cho 3 dư 1; 2^{2r+1} chia cho 3 dư 2.

Vậy $\left(2^{2r+1} - 2\right) \vdots 3$ nên 10a⋮3 hay a⋮3.

– Với b = 8 cũng chứng minh tương tự.

Cách 3: Vì n > 3, cho nên ta chỉ cần xét các trường hợp n = 4k, n =4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3 với $k \in N$ và $k \geq 1$.

– Với n = 4k, ta chứng minh được b = 4. Vậy a.b⋮6

– Với n = 4k + 1, ta suy ra b = 2 và chứng minh được a⋮3

– Với n = 4k + 2, ta suy ra b = 4 và chứng minh được a⋮3

– Với n = 4k + 3, ta suy ra b = 8 và chứng minh được a⋮3

Nhận xét: trong cả ba cách chứng minh trên đây, ta đều nhằm đi đến kết luận là b chỉ nhận một trong các giá trị 2, 4, 6, 8 và chỉ cần chứng minh rằng trong các trường hợp ấy thì a⋮3.

Ví dụ 7. Cho biết đa thức $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$ chia hết cho nhị thức $x - 2$.

Tìm đa thức thương.

Giải

Gọi đa thức bị chia là f(x), đa thức chia là g(x). Ở đây f(x) là đa thức bậc ba, còn g(x) là đa thức bậc nhất. Vì vậy thương phải là đa thức bậc hai, nghĩa là thương có dạng: $h(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta có: $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$

$= (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$

Đồng nhất hệ số ở các hạng tử cùng bậc ở hai vế, ta được:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 4 \\ -2c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Đa thức phải tìm là $h(x) = 3x^2 - x + 2$

Chú ý: Ta có thể nhận xét về hệ số cao nhất và hạng tử không đổi của f(x), g(x) và h(x) để có ngay: $a = 3, (-2c) = -4$, Do đó c = 2.

Ví dụ 8: Với giá trị nào của a và b thì đa thức: $x^3 + ax^2 + 2x + b$ chia hết cho đa thức: $x^2 + x + 1$? Hãy giải bài toán bằng hai cách khác nhau.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II toàn quốc, 1976)

Giải

Cách 1: Chia f(x) cho $x^2 + x + 1$

Ta được dư là: $(2-a)x + (b+1-a) = r(x)$. Ta có phép chia hết khi và chỉ khi r (x) = 0, tức là $\begin{cases} 2 - a = 0 \\ b + 1 - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ và b = 1.

Cách 2: Chú ý rằng f(x) bậc 3, còn đa thức chia là bậc 2, nên thương phải là một nhị thức bậc nhất, có dạng x + k. Từ đó:

$(x+k)(x^2 + x + 1) = x^3 + ax^2 + 2x + b$

$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + 2x + b = x^3 + (k+1)x^2 + (k+1)x + k$. Hệ số của các hạng tử cùng bậc phải bằng nhau, suy ra:

a = k + 1; 2 = k + 1; b = k. Từ đây ta có: k = 1, a = 2, b = 1.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng đa thức: $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ không thể có nghiệm là số nguyên.

(Theo đề thi vô địch toán Hungari 1963)

Giải

Với $a \in Z$, ta có: $P(a) = a^5 - 3a^4 + 6a^3 - 3a^2 + 9a - 6$

Nếu a chia hết cho 3 thì tất cả các số hạng trong P(a) đều chia hết cho 9, trừ số hạng 6, do đó P(a) không chia hết cho 9, nghĩa là $P(a) \neq 0$.

Nếu a không chia hết cho 3 thì a^5 không chia hết cho 3 trong khi tất cả các số hạng khác trong P(a) đều chia hết cho 3, do đó P(a) không chia hết cho 3, nghĩa là $P(a) \neq 0$. Vậy $P(a) \neq 0$ với mọi $a \in Z$.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in N$.

Giải

Cách 1: Ta xét hai khả năng:

a. Nếu $n \vdots 3$ thì rõ ràng $(n^3 + 2n) \vdots 3$

b. Nếu n không chia hết cho 3 thì n có dạng: $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$ với $k \in N$.

* Với $n = 3k + 1$: $(n^3 + 2n) = (3k + 1)^3 + 2(3k + 1)$

$= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 6k + 2 = 3(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1) \vdots 3$

* Với $n = 3k + 2$: $n^3 + 2n = (3k + 2)^3 + 2(3k + 2)$

$= 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 + 6k + 4 = 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 4) \vdots 3$

Mệnh đề được chứng minh

Cách 2: Chứng minh bằng quy nạp toán học:

1. $n = 1 \Rightarrow n^3 + 2n = 1 + 2.1 = 3$, vậy mệnh đề đúng với n = 1.

2. Giả sử mệnh đề đúng với k, nghĩa là ta có: $(k^3 + 2k) \vdots 3$

Ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với k + 1, nghĩa là phải chứng minh: $\left[(k+1)^3 + 2(k+1)\right] \vdots 3$. Ta có:

$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1), k \in N$

Nhưng $(k^3 + 2k) \vdots 3$ (theo giả thiết quy nạp); $3(k^2 + k + 1) \vdots 3$

Vậy $\left[(k+1)^3 + 2(k+1)\right] \vdots 3$. Vậy mệnh đề trên đúng với mọi $n \in N$.

Ví dụ 11 : Chứng minh rằng: $16^n - 15n - 1 \vdots 225$

Giải

1. Mệnh đề phải chứng minh đúng với n = 1

$$16^1 - 15.1 - 1 = 0 \vdots 225$$

2. Giả sử mệnh đề phải chứng minh là đúng với n = k

$16^k - 15.k - 1 \vdots 225$. Ta chứng minh rằng mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$

Thực vậy: $16^{k+1} - 15(k+1) - 1 = 16.16^k - 15k - 15 - 1$

$= (16^k - 15k - 1) + 15.16^k - 15$ vì $16.16^k = (15+1)16^k = 16^k + 15.16^k$

Theo giả thiết quy nạp thì: $16^k - 15.k - 1 \vdots 225$

Còn $15.16^k - 15 = 15(16^k - 1)$, Mà $16^k - 1 \vdots (16 - 1)$

Nên $15(16^k - 1) \vdots 15.15 = 225$. Vì vậy: $16^{k+1} - 15(k+1) - 1 \vdots 225$ (đpcm)

Ví dụ 12 : Tìm số nguyên dương n để biểu thức sau là số chính phương:

a) $n^2 - n + 2$ b) $n^4 - n + 2$

Giải:

a) Với $n = 1$ thì $n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương.
Với $n = 2$ thì $n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương.
Với $n > 2$ thì $n^2 - n + 2$ không là số chính phương vì:

$$(n-1)^2 < n^2 - (n-2) < n^2$$

b) Với $n > 2$ thì $(n^2 - 1)^2 < n^4 - (n-2) < (n^2)^2$ nên $n^4 - n + 2$ không là số chính phương. Xét $n = 1$ và $n = 2$. Đáp số: $n = 2$.

Ví dụ 13 : Tìm số nguyên tố p để $4p + 1$ là số chính phương.

Giải:

$4p + 1$ là số lẻ và là số chính phương nên

$4p + 1 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ (k nguyên)

$\Rightarrow 4p = 4k(k+1) \Rightarrow p = k(k+1)$

Do p là số nguyên tố nên $k = 1$. Khi đó $p = 2$ và $4p + 1 = 9 = 3^2$.

Bài tập vận dụng

1. Giải phương trình nghiệm là số tự nhiên của phương trình sau :

$2(x^2 - y^2) = 1978$.

2. Tìm số có sáu chữ số đôi một khác nhau $\overline{abcdef}$ sao cho

$\overline{abcdef} = a(1000\overline{cc}^2 - \overline{cc})$.

3. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$.

4. Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \ldots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không thể là một số nguyên

5. Tìm tất cả các tam giác vuông có ba cạnh là số nguyên và có diện tích bằng chu vi.

6. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất bắt đầu từ chữ số 1 sao cho nếu chuyển 1 xuống vị trí cuối cùng thì số đã cho tăng lên ba lần.

7. Hãy tìm các chữ số a, b, c, d; biết rằng a, $\overline{cd}$, $\overline{ad}$, $\overline{abcd}$ là các số chính phương.

8. Trong một hội nghị quốc tế có 6 đại biểu ở cùng một khách sạn. Nếu bất cứ 3 người nào gặp nhau thì trong họ có ít nhất 2 người có thể trò chuyện với nhau được. Chứng minh rằng có ba người từng đôi nói chuyện với nhau được.

9. Xác định số n, biết rằng, trong hệ đếm cơ số 7 thì n được viết $n = \overline{xyz}$, trong hệ đếm cơ số 11 thì nó được viết $n = \overline{zxy}$.

10. Tìm các số nguyên a, b, c sao cho đa thức: $(x+a)(x-4)-7$ phân tích thành thừa số được: $(x+b)(x+c)$.

11. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

12. Chứng minh rằng tích của 4 số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

13. Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$

14. Cho hai số dương x, y. Biết tổng của chúng bằng 6 lần trung bình nhân của chúng. Tính tỷ số $\frac{x}{y}$.

15. Cho $A = 1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \ldots + n^{2005}$

$B = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ với $n \in N^*$. Chứng minh $A \vdots B$

16. Tìm số tự nhiên có 5 chữ số, biết rằng số đó bằng lập phương của số tạo bởi chữ số hàng vạn và chữ số hàng nghìn của số đã cho (theo thứ tự đó).

17. Tìm số có ba chữ số sao cho tỉ số giữa số đó và tổng các chữ số của nó là bé nhất.

18. Tìm $n \in Z$ để $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương

19. Tìm x; y; z; t thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$

20. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

21. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn cả hai phương trình $2a + 3b = 6$ và $3a - 4c = 1$

22. Chứng minh rằng biểu thức: $A = n^3 + 20n$

Chia hết cho 48 với mọi số nguyên, chẵn.

23. Chứng minh rằng với n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức:

$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323.

24.a. Phân tích biểu thức ra nhân tử: $A = x^3(x^2-7)^2 - 36x$.

b. Dựa vào kết quả câu trên hãy chứng minh biểu thức: $n^3(n^2-7)^2 - 36n$ luôn luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên n

(Đề thi vào lớp chuyên toán miền Bắc, 1972)

25. Chứng minh rằng: $5.7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ chia hết cho 41 với n là số nguyên dương.

26. Giả sử x, y, z là các số nguyên dương, đôi một khác nhau, chứng minh rằng: Biểu thức $A = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ chia hết cho $B = 5(x-y)(y-z)(z-x)$

27. Chứng minh rằng biểu thức: $A = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$ chia hết cho 16 với mọi giá trị nguyên và lẻ của k.

28. Chứng minh rằng:

a. Nếu m là một số nguyên thì $(2m+1)^2 - 1$ chia hết cho 8.

b. Hiệu các bình phương của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 4.

c. Hiệu bình phương của hai số lẻ liên tiếp chia hết cho 8.

29. Cho hai số thực x, y sao cho x + y, $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là các số nguyên. Chứng minh $x^3 + y^3$ cũng là số nguyên.

30. Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên.

Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

31. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:

a. $n^3 + 3n^2 + 2n$ chia hết cho 6.

b. $(n^2 + n - 1)^2 - 1$ chia hết cho 24.

32. Chứng minh rằng:

a. $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi số chẵn n.

b. $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi số lẻ n.

33. a. Cho a là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $a^2 - 1$ chia hết cho 24.

b. Chứng minh rằng nếu a và b là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $a^2 - b^2$ chia hết cho 24.

c. Tìm điều kiện của số tự nhiên a để $a^4 - 1$ chia hết cho 240

34. Chứng minh rằng nếu $n+1$ và $2n+1$ $(n \in N)$ đều là số chính phương thì n chia hết cho 24.

35. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ $(n \in N)$ đều là số chính phương thì n chia hết cho 40.

36. Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức là số nguyên tố:

a. $12n^2 - 5n - 25$ b. $8n^2 + 10n + 3$ c. $\frac{n^2 + 3n}{4}$

37. Tìm số nguyên n sao cho:

a. $n^2 + 2n - 4$ chia hết cho 11.

b. $2n^3 + n^2 + 7n + 1$ chia hết cho $2n - 1$

c. $n^3 - 2$ chia hết cho $n - 2$.

d. $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$.

e. $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1$ chia hết cho $n^4 - 1$.

f. $n^3 - n^2 + 2n + 7$ chia hết cho $n^2 + 1$.

38. Chứng minh với mọi số nguyên n:

a. $n^3 - n$ chia hết cho 3.

b. $n^5 - n$ chia hết cho 5.

c. $n^7 - n$ chia hết cho 7.

39. Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

40. Chứng minh rằng $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 với mọi a, b nguyên.

41. Chứng minh rằng tổng các lập phương của hai số nguyên chia hết cho 6 khi và chỉ khi tổng hai số nguyên đó chia hết cho 6.

42. Chứng minh rằng tổng các lập phương ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

43. Chứng minh rằng $n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120 với mọi số nguyên n.

44. Chứng minh rằng $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số lẻ n.

45. Chứng minh $n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16n$ chia hết cho 384 với mọi số chẵn n.

46. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, số $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

47. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

48. Chứng minh rằng lấy tích bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1, ta được một số chính phương (số chính phương là bình phương của một số nguyên).

49. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$:

a. Số $n^4 + 4$ là hợp số.

b. Số $n^4 + 4k^4$ là hợp số (k tự nhiên).

50. a. Tính số trị biểu thức $\left(1 + ab - b^4\right)a^4 + 1$ với $a = 2^7$; $b = 5$.

b. Số $2^{32} + 1$ có là số nguyên tố không?

51. Chứng minh rằng số 11 … 1 22 … 2 gồm n chữ số 1 và n chữ số 2 là tích hai số nguyên liên tiếp với mọi số tự nhiên n.

52. Chứng minh rằng số $11\ldots1 - 22\ldots2$ gồm 2n chữ số 1 và n chữ số 2 là một số chính phương với mọi số tự nhiên n.

53 Có tồn tại hay không một số tự nhiên tận cùng là 2002 và chia hết cho 2003.

54. Chứng minh rằng có hai lũy thừa của 2001 có bốn chữ số tận cùng bằng nhau.

55. Chứng minh rằng tồn tại một lũy thừa của 3 mà bốn chữ số tận cùng của nó là 0001.

56. Cho 2001 số tùy ý. Chứng minh rằng có thể chọn được một số hoặc một số số nào đó mà tổng của chúng chia hết cho 2001.

57. Chứng minh rằng trong tám số tự nhiên, mỗi số có ba chữ số, bao giờ cũng có thể chọn được hai số mà khi viết liền nhau ta thu được một số có sáu chữ số và chia hết cho 7.

58. Chứng minh trong 27 số nguyên khác nhau tùy ý nhỏ hơn 100 có thể chọn được hai số có ước số chung lớn nhất khác 1.

Hướng dẫn và đáp số

1. Ta có, từ phương trình đã cho suy ra

$$2\left(x^2 - y^2\right) = 1978 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 989 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 23.43$$

Do x, y là số tự nhiên nên xảy ra các trường hợp sau

a. $\begin{cases} x - y = 23 \\ x + y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 10 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 23.43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 495 \\ y = 494 \end{cases}$

2. Ta có $\overline{abcdef} = a(1000\overline{cc}^2 - \overline{cc}) \Leftrightarrow \overline{abcdef} = 121000ac^2 - 11ac$.

Do $a, b, c, d, e, f \in N, 1 \le a \le 9, 0 \le b, c, d, e, f \le 9$, suy ra $11ac < 1100$, $0 < \overline{abcdef} < 10^6$, nên xảy ra a = 1, c = 2 hoặc a = 2 , c = 1, vì a khác c

* Khi a = 2, c = 1 ta có $\overline{abcdef} = 121000.2 - 22 = 241978$.

* Khi a = 1, c = 2 ta có $\overline{abcdef} = 121000.4 - 22 = 483978$.

3. Ta có $x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + z^2 + 2\right)^2 - \left(x^2 + 3\right) = y^4$ (1) hoặc

$\Leftrightarrow \left(x^2 + z^2 + 1\right)^2 + x^2 + 2z^2 = y^4$ (2)

Nhưng ta có $x^2 + 2z^2 \ge 0$ và $x^2 + 3 > 0; (\forall x, z \in Z)$. Từ (1) và (2), ta có $\left(x^2 + z^2 + 1\right)^2 \le y^4 < \left(x^2 + z^2 + 2\right)^2 \Rightarrow y^4 = \left(x^2 + z^2 + 1\right)^2$. Kết hợp với phương trình (2) ta có $x^2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow x = z = 0$ nên $y = \pm 1$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y; z) = (0; 1; 0); (0; -1; 0)$.

4. $S = \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \frac{4^2-1}{4^2} + \ldots + \frac{n^2-1}{n^2}$

$$S = \left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \left(1-\frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$S = n-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) < n-1$. Vậy: $S < n-1$ (1)

- Ta chứng minh: $S > n-2$

Thật vậy: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1).n}$

$$< \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right) < 1-\frac{1}{n}$$

Do đó: $S > n-1-\left(1-\frac{1}{n}\right) = n-2+\frac{1}{n} > n-2$.

Vậy: $S > n-2$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra: $n-2 < S < n-1$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$. Mà $n-2$ và $n-1$ là hai số nguyên dương liên tiếp. nên S không là số nguyên.

5. Gọi x, y, z là các cạnh của tam giác vuông $1 \leq x \leq y < z$

Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 (*) \\ xy = 2(x+y+z) (**) \end{cases}$

. Từ (*) ta có: $z^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$

$= (x+y)^2 - 4(x+y) - 4z$

$\Leftrightarrow z^2+4z+4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 \Leftrightarrow (z+2)^2 = (x+y-2)^2$

$\Leftrightarrow x+y-2 = z+2$ (vì $x+y \geq 2$)

. Thay $z = x+y-4$ vào (**) ta được:

$(x-4)(y-4) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=1 \\ y-4=8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-4=2 \\ y-4=4 \end{cases}$ (vì $y \geq x$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$

. Vậy độ dài các cạnh tam giác vuông cần tìm là: 5,12,13 hoặc 6,8,10.

6. Gọi số cần tìm là: $A = \overline{1a_1a_2\ldots a_n}$

Đặt $B = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Ta có: $A = \overline{1B}$

. Theo đề bài ta có: $\overline{B1} = 3.\overline{1B}$

Suy ra: $10B + 1 = 3\left(10^n + B\right) \Leftrightarrow B = \frac{3.10^n - 1}{7}$

. Bằng phép thử với n = 5 thì B = 42857

. Khi đó số bé nhất cần tìm là A = 142857.

7. Do a chính phương nên a bằng 1, 4 hoặc 9. Do đó $\overline{ad}$ bằng 16 hay 49. Suy ra $\overline{cd}$ bằng 16, 36 hay 49. Từ những điều này ta có $a = 1$ hoặc $a = 4$.
Vậy $\overline{abcd}$ có dạng: $\overline{1b16}$, $\overline{1b36}$, $\overline{1b49}$, $\overline{4b16}$, $\overline{4b36}$, $\overline{4b49}$ trong này chỉ có 1936 là số chính phương.

8. Xét người A. Trong 5 người còn lại phải có ba người cùng nói chuyện được hoặc cùng không nói chuyện được với A, ta gọi ba người này là B, C, D. Giả sử cả B, C, D cùng nói chuyện được với A. Theo giả thiết, có ít nhất hai trong ba người ấy nói chuyện được với nhau, cùng với A, họ lập thành một bộ ba cần tìm.
Giả sử B, C, D cùng không nói chuyện được với A. Theo giả thiết, suy ra rằng nhóm (B, C, A) có B, C nói chuyện với nhau; nhóm (B, D, A) có B, D nói chuyện với nhau; nhóm (C, D, A) có D, C nói chuyện với nhau. Vậy lúc này (B, C, D) là bộ ba phải tìm.

9. Ta phải có $0 \le x, y, z \le 6$. Từ giả thiết:

$49x + 7y + z = 121z + 11x + y \Rightarrow 19x = 60z - 3y$

Do đó x chia hết cho 3, tức là $x = 3$ hoặc $x = 6$.

* $x = 3$ thì $y = 20z - 19$, suy ra $z = 1;\ y = 1$.

* $x = 6$ thì $y = 30z - 38$ (loại).

Vậy, số phải tìm là 155, viết trong cơ số 7 là 311 và trong cơ số 11 là 131.

10. Với mọi x ta có: $(x + a)(x - 4) - 7 = (x + b)(x + c)$

Nên với x = 4 thì $-7 = (4 + b)(4 + c)$

Có 2 trường hợp: $\begin{cases} 4 + b = 1 \\ 4 + c = -7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 4 + b = 7 \\ 4 + c = -1 \end{cases}$

Trường hợp thứ nhất cho $b = -3; c = -11; a = -10$.

Ta có: $(x - 10)(x - 4) - 7 = (x - 3)(x - 11)$

Trường hợp thứ hai cho $b = 3; c = -5; a = 2$

Ta có $(x + 2)(x - 4) - 7 = (x + 3)(x - 5)$

11. $3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4xy + 6xy + 8y^2 = 96 \Leftrightarrow (3x^2 + 6xy) + (4xy + 8y^2) = 96$

$\Leftrightarrow 3x(x + 2y) + 4y(x + 2y) = 96 \Leftrightarrow (x + 2y)(3x + 4y) = 96$. Do x, y nguyên dương nên $x + 2y; 3x + 4y$ nguyên dương và $3x + 4y > x + 2y \ge 3$. Mà

$96=2^5.3$ có các ước là 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24; 32; 48; 96 được biểu diễn thành tích 2 thừa số không nhỏ hơn 3 là: $96=3.32=4.24=6.16=8.12$

Lại có $x+2y$ và $3x+4y$ có tích là 96 (số chẵn) có tổng $4x+6y$ là số chẵn

do đó $\begin{cases}x+2y=4\\3x+4y=24\end{cases}$

Hệ phương trình này vô nghiệm.

Hoặc $\begin{cases}x+2y=6\\3x+4y=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$

Hoặc $\begin{cases}x+2y=8\\3x+4y=12\end{cases}$. Hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy các số x, y nguyên dương cần tìm là (x, y) = (4, 1)

12. Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $x;x+1;x+2;x+3$ với x nguyên dương. Giả sử $x(x+1)(x+2)(x+3)=k^2 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)=k^2$

$\Leftrightarrow (x^2+3x+1)^2-1=k^2$. Trong đó $(x^2+3x+1)^2$ và k^2 là hai số chính phương hơn kém nhau 1 đơn vị nên $(x^2+3x+1)^2=1$ và $k^2=0$ $\Rightarrow x=0;x=-3$ trái với giả thiết. Vậy tích của bốn số nguyên dương liên tiếp không thể là số chính phương.

b) Chứng minh rằng với số nguyên dương a chia cho 4 dư 2 thì biểu thức $P=3^n+an+3$ chia hết cho 4 với số nguyên dương n bất kỳ.

b) $P=3^n+an+3$ với n nguyên dương

Với $a=4m+2(m\in N^*)$ thì $P=3^n+(4m+2)n+3$

* $n=1$ thì $P=3+4m+2+3=8+4m \vdots 4$

* Giả sử $P=3^n+(4m+2)n+3 \vdots 4$ với n = k, tức là:

$P_K=3^k+(4m+2)k+3 \vdots 4$

* Ta có: $P_{k+1}=3^{k+1}+(4m+2)(k+1)+3$

$=3^k.(2+1)+(4m+2)k+4m+2+3=3^k.2+3^k+(4m+2)k+4m+2+3$

$=P_k+3^k.2+4m+2=P_k+4m+2(3^k+1) \vdots 4$. Vậy $P \vdots 4$ với $a=4m+2$

13. $x^2y^2-x^2-8y^2=2xy$ (1). Ta có x = y = 0 là một nghiệm của phương trình. Xét $x;y\neq 0$. Từ (1) $\Leftrightarrow y^2(x^2-7)=(x+y)^2$

$\Rightarrow x^2-7$ là số chính phương $\Rightarrow x^2-7=a^2 \Rightarrow (x-a)(x+a)=7$

Kết quả: $(x;y)=(0;0);(4;-1);(4;2);(-4;1);(-4;-2)$

14. Ta có $x + y = 6\sqrt{xy}$. Chia cả hai vế cho y ta được: $\frac{x}{y} + 1 = 6\sqrt{\frac{x}{y}}$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}} > 0$; ta có phương trình: $t^2 - 6t + 1 = 0$

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $t_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ và $t_2 = 3 - 2\sqrt{2}$

Vậy $\frac{x}{y} = t^2 = 17 \pm 12\sqrt{2}$.

15. $B = 1 + 2 + 3 + ... + n \Rightarrow 2B = n(n+1)$; $A = 1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + ... + n^{2005}$

$\Rightarrow 2A = \left(1^{2005} + n^{2005}\right) + \left[2^{2005} + (n-1)^{2005}\right] + ...$

$+ \left[(n-1)^{2005} + 2^{2005}\right] + \left(n^{2005} + 1^{2005}\right)$

Các biểu thức trong ngoặc đều chia hết cho n + 1 nên: $2A \vdots (n+1)$ (1)

Lại có:

$2A = \left(1^{2005} + (n-1)^{2005}\right) + \left[2^{2005} + (n-2)^{2005}\right] + ... + \left[(n-1)^{2005} + 1^{2005}\right] + 2n^{2005}$

Các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho n nên $2A \vdots n$ (2)

Vì n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra $2A \vdots n(n+1) = 2B$. Vậy $A \vdots B$.

16. Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$, ta có: $\overline{abcde} = \overline{ab}^3$

Đặt $x = \overline{ab}; y = \overline{cde} (0 \le y < 1000)$. Ta có: $1000x + y = x^3$ (1)

$\Rightarrow 1000x \le x^3 \Rightarrow 1000 \le x^2 \Rightarrow 32 \le x$ (2). Vì y < 1000 nên từ

(1) $\Rightarrow 1000x + 1000 > x^3 \Rightarrow x\left(x^2 - 1000\right) < 1000$

$\Rightarrow x < 33$ (3). Từ (2) và (3) suy ra x = 32. Vậy số cần tìm là $32^3 = 32768$.

17. Gọi số có ba chữ số cần tìm là $\overline{abc}$ $(a; b; c \in N; 0 < a \le 9; 0 \le b; c \le 9)$.

Ta có: $k = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a + 9b}{a+b+c}$

Với a,b xác định thì k bé nhất khi c lớn nhất $\Rightarrow c = 9$

$k = 1 + \frac{99a + 9b}{a+b+9} = 1 + \frac{9(a+b+9) + 90a - 81}{a+b+9}$

$= 1 + 9 + \frac{90a - 81}{a+b+9} = 10 + \frac{90a - 81}{a+b+9}$

Với a xác định thì k bé nhất khi b lớn nhất $\Rightarrow$ b = 9

$$k = 10 + \frac{90a - 81}{a + 18} = 10 + 9.\frac{10a - 9}{a + 18} = 10 + 9.\frac{10(a + 18) - 189}{a + 18}$$

$$= 10 + 90 - \frac{9.189}{a + 18} = 190 - \frac{9.189}{a + 18}$$ bé nhất khi a bé nhất $\Rightarrow a = 1$

Vậy số phải tìm là 199 và $k = \frac{199}{19}$

18. $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương

$\Leftrightarrow 4\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7\right) = k^2 \left(k \in Z\right) \Leftrightarrow 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 28 = k^2$

$\Leftrightarrow \left(2n^2 + 2n + 1\right)^2 + 27 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - \left(2n^2 + 2n + 1\right)^2 = 27$

$\Leftrightarrow \left(k + 2n^2 + 2n + 1\right)\left(k - 2n^2 - 2n - 1\right) = 27$

Xét các trường hợp xảy ra tìm được $n = 2$ hoặc $n = -3$

19. $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x\left(y + z + t\right)$. Nhân cả hai vế của phương trình với 4:

$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 = 4xy + 4xz + 4xt$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 - 4xz + 4z^2 + x^2 - 4xt + 4t^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(x - 2y\right)^2 + \left(x - 2z\right)^2 + \left(x - 2t\right)^2 = 0$

Suy ra $x = y = z = t = 0$.

20. ***Cách 1:*** Vai trò của x và y như nhau nên ta có thể giả sử: $x \ge y$.

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$; $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2$

$x \ge y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le 4$. Do đó: $y = 3$ hay $y = 4$.

Với $y = 3$ thì $x = 6$. Do tính đối xứng ta cũng có: $x = 3$ và $y = 6$.

Với $y = 4$ thì $x = 4$.

Cách 2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x + y) = xy \Leftrightarrow 2x - xy + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x(2 - y) - 2(2 - y) = -4$

$\Leftrightarrow (2 - x)(2 - y) = 4 = 1.4 = 4.1 = (-1)(-4) = (-4)(-1) = 2.2 = (-2)(-2)$.

Vì $x, y > 0$ nên $2 - x < 2$, $2 - y < 2$. Do đó ta có các trường hợp:

- $2 - x = 1$ và $2 - y = 4 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = -2$ (loại).
- $2 - x = -1$ và $2 - y = -4 \Leftrightarrow x = 3$ và $y = 6$ (nhận).
- $2 - x = -4$ và $2 - y = -1 \Leftrightarrow x = 6$ và $y = 3$ (nhận).
- $2 - x = -2$ và $2 - y = -2 \Leftrightarrow x = 4$ và $y = 4$ (nhận).

21. Để khử a, ta biến đổi các phương trình đã cho thành $6a+9b=18$ và $6a+8c=2$. Suy ra $9b-8c=16$. Do đó $c=\dfrac{9b-16}{8}=b-2+\dfrac{b}{8}$

b, a, c là các số nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{b}{8}$ là số nguyên.

Đặt $b=8k\ (k\in Z)$ thì $c=8k-2+k=9k-2$.

Thay vào $3a+4c=1$ được $3a=1-4(9k-2)=-36k+9$, do đó

$a=-12k+3$. Các số nguyên a, b, c phải tìm có dạng:

$a=-12k+3, b=8k, c=9k-2$ với $k\in Z$.

22. Vì n là số nguyên chẵn, ta đặt n = 2k, và có:

$$A=n^3+20n=(2k)^3+20(2k)=8k^3+40k=8(k^3+5k)$$

Ta thấy ngay $A\,\vdots\,8$ (1). Bây giờ ta sẽ chứng minh: $(k^3+5k)\,\vdots\,6$. Ta có:

$k^3+5k=k^3-k+6k=(k^3-k)+6k$. Trong bài trên ta đã chứng minh $(k^3-k)\,\vdots\,6$ và rõ ràng $6k\,\vdots\,6$ nên $(k^3+5k)\,\vdots\,6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A\,\vdots\,48$.

23. Chú ý rằng 323 = 17.19 và (17, 19) = 1 nên ta sẽ chứng minh:

$A\,\vdots\,17$ và $A\,\vdots\,19$. Ta viết: $A=20^n+16^n-3^n-1=(20^n-3^n)+(16^n-1)$.

Ta có: $B=20^n-3^n\,\vdots\,(20-3)=17$ và $C=16^n-1\,\vdots\,(16+1)=17$ (do n chẵn)

Do đó A = B + C chia hết cho 17 (1). Tương tự, ta lại viết:

$$A=20^n+16^n-3^n-1=(20^n-1)+(16^n-3^n)$$

Ta có: $D=20^n-1\,\vdots\,(20-1)=19$; $E=16^n-3^n\,\vdots\,(16+3)=19$ (do n chẵn)

Do đó: A = D + E chia hết cho 19. Từ (1) và (2), ta suy ra $A\,\vdots\,17.19$, tức $A\,\vdots\,323$.

24. a. ***Cách 1:*** $A=x^3(x^2-7^2)^2-36x$

$$=x\left[x^2(x^2-7)^2-36\right]=x(x^6-14x^4+49x^2-36)$$

$$=x\left[(x^6-9x^4)-(5x^4-45x^2)+(4x^2-36)\right]$$

$$=x\left[x^4(x^2-9)-5x^2(x^2-9)+4(x^2-9)\right]=x(x^2-9)(x^4-5x^2+4)$$

$$=x(x^2-9)(x^2-1)(x^2-4)=x(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Cách 2: Xét : $B=x^2(x^2-7)^2-36$. Dễ thấy rằng: B = 0 với $x=\pm1,\pm2,\pm3$;

Do đó vì B là đa thức bậc 6 của x, ta có:

$B=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

$\Rightarrow A = (x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)$

b. Theo kết quả trên, ta có:

$$n^3(n^2-7)^2 - 36n = n(n-3)(n+3)(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$$

Ta viết lại dưới dạng: $(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp, trong 7 số nguyên liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 7, nên tích chia hết cho 7(đpcm).

25. $A = 5.7^{2(n+1)} + 2^{3n} = 5.49^{n+1} + 8^n = 5(41+8)^{n+1} + 8^n$

Áp dụng công thức nhị thức Newton , ta có:

$$(41+8)^{n+1} = 41^{n+1} + (n+1).41^n.8 + \frac{n(n+1)}{2}41^{n-1}.8^2 + ... + (n+1)41.8^n + 8^{n+1}$$

Vậy: $A = 5\left[41^{n+1} + (n+1)41^n.8 + ... + (n+1)41.8^n + 8^{n+1}\right] + 8^n$

$= 5\left[41^{n+1} + (n+1)41^n.8 + ... + (n+1)41.8^n\right] + 5.8^{n+1} + 8^n$

Đặt $B = 5\left[41^{n+1} + (n+1)41^n.8 + ... + (n+1)41.8^n\right]$

Ta thấy $B \vdots 41$ (vì các hạng tử trong ngoặc [] đều chia hết cho 41)

Bây giờ ta cần chứng minh: $C = 5.8^{n+1} + 8^n$ chia hết cho 41.

Ta có: $C = 5.8^{n+1} + 8^n = 8^n(5.8+1) = 8^n.41$. Vậy $C \vdots 41$.

Tóm lại $A = B + C$ mà $B \vdots 41$, $C \vdots 41$. Vậy $A \vdots 41$.

26. Đặt $x - y = a, y - z = b, z - x = c$

Ta nhận thấy $a + b + c = 0$; $A = a^5 + b^5 + c^5$; $B = 5abc$.

Phân tích A thành nhân tử, với điều kiện $a + b + c = 0$ tức là $-(a+b) = c$

$A = a^5 + b^5 + c^5 = a^5 + b^5 - (a+b)^5$

$= -5ab(a+b)(a^2+ab+b^2) = 5abc(a^2+ab+b^2)$ (do $a + b = -c$).

Vậy $A \vdots B$.

27. Phân tích A thành $(k-1)(k+1)(k-3)(k+5)$ khi k nguyên và lẻ thì cả bốn nhân tử trên đều chẵn, do vậy đều chia hết cho 2. Vậy cả tích phải chia hết cho 16

Nhận xét: có thể viết: $A = (k-3)(k-1)(k+1)(k+5)$ ta thấy $k-3, k-1$ và $k+1$ là ba số chẵn liên tiếp (do k lẻ) và có thể chứng minh được a chia hết cho 96

28. a. Ta có: $(2m+1)^2 - 1 = (2m+1+1)(2m+1-1) = 4m(m+1)$

m và m + 1 là hai số nguyên liên tiếp, nên chắc chắn phải có một số là chẵn. Do vậy tích m(m + 1) chia hết cho 2.

Vậy $4m(m+1)$ phải chia hết cho 8.

b. Lấy một số chẵn là 2n thì số chẵn liền sau nó là 2n + 2.

Hiệu: $(2n+2)^2-(2n)^2=4(2n+1)$, chia hết cho 4.

c. Lấy một số lẻ là 2n + 1 thì số lẻ liền trước nó là $2n-1$. Ta xét hiệu:

$(2n+1)^2-(2n-1)^2=\left[(2n+1)+(2n-1)\right]\left[(2n+1)-(2n-1)\right]$

= 8n chia hết cho 8.

29. Ta có $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$ (1)

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ (2) ; $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ (3)

Vì $x + y$, $x^2 + y^2$ là số nguyên nên từ (2) $\Rightarrow$ $2xy$ là số nguyên.

Vì $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ là số nguyên nên từ (3) $\Rightarrow 2x^2y^2 = \frac{1}{2}(2xy)^2$ là số nguyên $\Rightarrow (2xy)^2$ chia hết cho 2 $\Rightarrow$ 2xy chia hết cho 2 (do 2 là nguyên tố) $\Rightarrow$ xy là số nguyên.Do đó từ (1) suy ra $x^3 + y^3$ là số nguyên.

30. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác vuông ABC, c là cạnh huyền.

Ta có $a^2+b^2=c^2$; a, b, c $\in \mathbb{N}^*$, diện tích tam giác ABC là $S=\frac{ab}{2}$

Trước hết ta chứng minh ab chia hết cho 12.

+ Chứng minh $ab \vdots 3$: Nếu cả a và b đồng thời không chia hết cho 3 thì a^2+b^2 chia 3 dư 2. Suy ra số chính phương c^2 chia 3 dư 2, vô lý.

+ Chứng minh $ab \vdots 4$ – Nếu a, b chẵn thì $ab \vdots 4$.

– Nếu trong hai số a, b có số lẻ, chẳng hạn a lẻ.

Lúc đó c lẻ. Vì nếu c chẵn thì $c^2 \vdots 4$, trong lúc a^2+b^2 không thể chia hết cho 4. Đặt a = 2k + 1, c = 2h + 1, k, h $\in \mathbb{N}$.

Ta có: $b^2=(2h+1)^2-(2k+1)^2=4(h-k)(h+k+1)$

$= 4(h-k)(h-k+1)+8k(h-k) \vdots 8$.

Suy ra $b \vdots 4$. Nếu ta chia cạnh AB (chẳng hạn) thành 6 phần bằng nhau, nối các điểm chia với C thì tam giác ABC được chia thành 6 tam giác, mỗi tam giác này có diện tích bằng $\frac{ab}{12}$ là một số nguyên.

31. a) Biến đổi: $n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$ đó là tích 3 số nguyên liên tiếp.

b) Biến đổi: $(n-1)n(n+1)(n+2)$ đó là tích 4 số nguyên liên tiếp.

32. a) Biến đổi: $n(n+2)(n+4)$ rồi thay $n=2k$, được $8k(k+1)(k+2)$.

b) Phân tích n^4-10n^2+9 thành nhân tử rồi thay $n=2k+1$.

33. a) Ta có a^2 là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1, a^2 là số chính phương không chia hết cho 3 nên chia cho 3 dư 1. Suy ra $a^2 - 1$ chia hết cho 8, chia hết cho 3, do đó chia hết cho 24.

b) Áp dụng kết quả của câu a).

c) $240 = 2^4 \ . \ 3 \ . \ 5$; $A = a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$

Nếu a lẻ thì $(a - 1)(a + 1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8, còn $a^2 + 1$ chia hết cho 2, do đó A chia hết cho 16. Còn nếu a chẵn thì A không chia hết cho 2.

Nếu $a = 3k \pm 1$ $(k \in N)$ thì $a^2 - 1$ chia hết cho 3, do đó A chia hết cho 3. Còn nếu $a = 3k$ $(k \in N)$ thì A chia cho 3 dư 2.

Nếu $a = 5k \pm 1$ $(k \in N)$ thì $a^2 - 1$ chia hết cho 5, nếu $a = 5k \pm 2$ $(k \in N)$ thì $a^2 + 1$ chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5. Còn nếu $a = 5k$ $(k \in N)$ thì A chia cho 5 dư 4. Vậy điều kiện để $a^4 - 1$ chia hết cho 240 là a lẻ, không chia hết cho 3, không chia hết cho 5.

Chú ý: Từ kết quả trên, ta có bài toán: Nếu a là số nguyên tố lớn hơn 5 thì $a^4 - 1$ chia hết cho 240.

34. Chứng minh n chia hết cho 3: Nếu $n = 3k + 1$ thì $n + 1 = 3k + 2$, không là số chính phương, loại. Nếu $n = 3k + 2$ thì $2n + 1 = 3(2k + 1) + 2$, không là số chính phương, loại. Vậy n chia hết cho 3.

Chứng minh n chia hết cho 8: Ta có $2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1 (1), do đó 2n chia hết cho 8, n chia hết cho 4, $n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1, do đó n chia hết cho 8.

35. $2n + 1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1 $\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ $3n + 1$ là số chính phương lẻ, số này chia cho 8 dư 1 nên 3n chia hết cho 8, do đó n chia hết cho 8 (1).

Cách 1. $3n + 1$ tận cùng 1, 5, 9 $\Rightarrow$ 3n tận cùng 0, 4, 8 $\Rightarrow$ n tận cùng 0, 8, 6. Loại trường hợp n tận cùng bằng 8 (vì $2n + 1$ tận cùng bằng 7, không là số chính phương), loại trường hợp n tận cùng bằng 6 (vì khi đó $2n + 1$ tận cùng bằng 3, không là số chính phương). Vậy n tận cùng bằng 0. (2)

Từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Cách 2: $2n+1$, $3n+1$ là các số chính phương lẻ nên tận cùng bằng 1, 5, 9 do đó chia cho 5 dư 1, 0, 4. Tổng của chúng là $5n+2$ nên mỗi số $2n+1$, $3n+1$ đều chia cho 5 dư 1, do đó 2n và 3n đều chia hết cho 5, vậy n chia hết cho 5. (3)

Từ (1) và (3) suy ra n chia hết cho 40.

36. a) Phân tích thành nhân tử:

$$12n^2-5n-25=12n^2+15n-20n-25$$
$$=3n(4n+5)-5(4n+5)=(4n+5)(3n-5)$$

Do $12n^2-5n-25$ là số nguyên tố và $4n+5>0$ nên $3n-5>0$. Ta lại có $3n-5<4n+5$ (vì $n\geq 0$) nên để $12n^2-5n-25$ là số nguyên tố thì thừa số nhỏ phải bằng 1. Giải điều kiện $3n-5=1$, được $n=2$.

Khi đó, $12n^2-5n-25=13\,.\,1=13$ là số nguyên tố.

Vậy với $n=2$ thì giá trị biểu thức $12n^2-5n-25$ là số nguyên tố 13.

b) Biến đổi: $8n^2+10n+3=(2n+1)(4n+3)$

Đáp số: $n=0$, khi đó $8n^2+10n+3=3$.

c) $A=\dfrac{n^2+3n}{4}$. Do A là số tự nhiên nên $n(n+3)\ \vdots\ 4$. Hai số n và $n+3$ không thể cùng chẵn. Vậy hoặc n, hoặc $n+3$ chia hết cho 4.

Nếu $n=0$ thì $A=0$, không là số nguyên tố.

Nếu $n=4$ thì $A=7$, là số nguyên tố.

Nếu $n=4k$ $(k\in Z,\ k>1)$ thì $A=k(4k+3)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên A là hợp số.

Nếu $n+3=4$ thì $A=1$, không là số nguyên tố.

Nếu $n+3=4k$ $(k\in Z,\ k>1)$ thì $A=k(4k-3)$ là tích của hai thừa số lớn hơn 1, nên A là hợp số.

Vậy $n=4$ khi đó $A=7$.

37. a) $n^2+2n-4=(n-3)(n+5)+11$ chia hết cho 11.Vậy $n=BS\ 11+3$ hoặc $n=BS\ 11-5$.

b) Đáp số: 1, 0, 3, -2.

c) n^3-8+6 chia hết cho $n-2$ nên 6 chia hết cho $n-2$.

Đáp số: 3; 1; 4; 0; 5; 8; -1; -4

d) Phải có n^2+n+1 là ước của 3. Chú ý rằng $n^2+n+1>0$ nên chỉ xét $n^2+n+1=3$ hoặc $n^2+n+1=1$.

Đáp số: 1; 0; -2; -1.

e) $A = n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2(n^2+1)$

$B = n^4 - 1 = (n^2+1)(n+1)(n-1)$

Do $n \neq \pm 1$ nên $n-1$ chia hết cho $n+1 \Rightarrow 2$ chia hết cho $n+1$.

Đáp số: 0; -2; -3 (chú ý $n = 1$ loại)

f) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$, được $n - 1$, dư $n + 8$.

$n + 8 \;\vdots\; n^2 + 1 \Rightarrow (n+8)(n-8) = n^2 - 64 \;\vdots\; n^2 + 1$

$\Rightarrow n^2 + 1 - 65 \;\vdots\; n^2 + 1 \Rightarrow 65 \;\vdots\; n^2 + 1$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1; 5; 13; 65 được n bằng 0; ± 2; ± 8. Thử lại các giá trị $n = 2$; $n = 0$; $n = -8$ thỏa mãn.

38. a) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$.Trong 3 số nguyên liên tiếp, có một bội số của 3. Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 3.

b) ***Cách 1:*** Phân tích thành một tổng trong đó một số hạng là tích 5 số nguyên liên tiếp, số hạng kia chia hết cho 5.

$n^5 - n = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n^2-1)(n^2-4+5)$

$= n(n^2-1)(n+2)(n-2) + 5n(n^2-1)$

$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5n(n^2-1)$

Số hạng đầu là tích 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5. Số hạng sau cũng chia hết cho 5. Do đó $n^5 - n$ chia hết cho 5.

Cũng có thể diễn đạt dưới hình thức xét hiệu giữa $n^5 - n$ và tích 5 số nguyên liên tiếp.

$(n^5 - n) - (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (n^5 - n) - (n^5 - 5n^3 + 4n)$

$= 5n^3 - 5n$.

Cách 2: Xét số dư của n trong phép chia cho 5.

$A = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2+1)(n^2-1)$

Nếu $n = 5k$ (k nguyên) thì n chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5.

Trường hợp nào cũng có thể có một thừa số của A chia hết cho 5.

c) ***Cách 1:*** Xét hiệu

$(n^7 - n) - (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$

$= 7n(2n^4 - 7n^2 + 5)$.

ABC

Cách 2: Phân tích $n^7 - n$ thành $n(n^3+1)(n^3-1)$ rồi xét các trường hợp $n = 7k$; $n = 7k \pm 1$; $n = 7k \pm 2$; $n = 7k \pm 3$.

Chú ý: $n^9 - n$ *không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n (ví dụ* $2^9 - 2 = 510$ *không chia hết cho 9). Các bài 50a, b, c là trường hợp đặc biệt của định lý Fec-ma: Nếu p là số nguyên tố thì* $n^p - n$ *chia hết cho p với mọi số nguyên n.*

39. $2n^3 + 3n^2 + n = 2n^3 - 2n + 3n^2 + 3n = 2(n^3 - n) + 3n(n+1)$

Mỗi số hạng đều chia hết cho 6 nên tổng chia hết cho 6.

40. $a^3b - ab^3 = a^3b - ab - ab^3 + ab = b(a^3 - a) - a(b^3 - b)$

Các số $a^3 - a$; $b^3 - b$ đều chia hết cho 6.

41. Gọi các số nguyên đó là a và b. Xét hiệu:

$(a^3 + b^3) - (a + b) = (a^3 - a) + (b^3 - b)$. Vế phải của đẳng thức trên chia hết cho 6 nên $(a^3 + b^3) - (a + b)$ chia hết cho 6.

Do đó, nếu $a + b$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3$ chia hết cho 6, nếu $a^3 + b^3$ chia hết cho 6 thì $a + b$ chia hết cho 6.

42. ***Cách 1:*** Gọi 3 số nguyên liên tiếp là $n - 1$; n; $n + 1$. Ta có:

$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n^3 - 3n + 6n + 3n = 3(n^3 - n) + 9n$

Tổng trên chia hết cho 9.

Cách 2: Cũng biến đổi như trên được $3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$ rồi xét các trường hợp $n = 3k$; $n = 3k \pm 1$.

Cách 3: Trong 3 số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 3, một số chia hết cho 3 dư 1, một số chia hết cho 3 dư 2. Do đó tổng các lập phương của chúng có dạng $(3a)^3 + (3b+1)^3 + (3c+2)^3$. Khai triển, ta thấy tổng trên chia hết cho 9.

43. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4)$

$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2)$. Đây là tích của 5 số nguyên liên tiếp. Trong 5 số nguyên liên tiếp, có ít nhất 2 bội số của 2 (trong đó có một bội số của 4), một bội số của 3, một bội số của 5. Do đó tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 8, cho 3, cho 5. Các số 8, 3 và 5 nguyên tố cùng nhau đôi một nên tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho $8.3.5 = 120$.

44. $n^3 - 3n^2 - n + 3 = n^2(n-3) - (n-3) = (n-3)(n-1)(n+1)$.

Thay $n = 2k+1$ (k nguyên) ta được $(2k-2).2k.(2k+2)$ hay $8(k-1)k(k+1)$.

Tích 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6 nên tích trên chia hết cho 48.

45. Phân tích thành $n(n+4)(n-2)(n+2)$ rồi thay $n = 2k$ được $16k(k+2)(k-1)(k+1)$. Chú ý tích 4 số nguyên liên tiếp chia hết cho 24.

46. Viết biểu thức dưới dạng

$n^2 + 11n + 39 = n^2 + 11n + 18 + 21 = (n+9)(n+2) + 21 = A$.

Ta thấy $n+9$ và $n+2$ có hiệu bằng 7 nên chúng hoặc cùng chia hết cho 7, hoặc cùng không chia hết cho 7. Nếu $n+9$ và $n+2$ cùng chia hết cho 7 thì $(n+9).(n+2)$ chia hết cho 49, nhưng 21 không chia hết cho 49 nên A không chia hết cho 49.

Nếu $n+9$ và $n+2$ cùng không chia hết cho 7 (7 là số nguyên tố) thì $(n+9).(n+2)$ không chia hết cho 7, nên cũng không chia hết cho 49.

Vậy, với mọi số nguyên n thì $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Chú ý: Trong biến đổi trên, ta đưa biểu thức $n^2 + 11n + 39$ *về dạng* $(n+a)(n+b)+c$, *trong đó* $(n+a)-(n+b) = 7$, $a+b = 11$. *Như vậy chỉ cần chọn a và b sao cho* $a - b = 7$ *và* $a + b = 11$. *Do đó chọn* $a = 9;\ b = 2$.

47. Viết $n^2 + n + 1$ thành $= \dfrac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...(n-1)n} . \dfrac{3.4.5...n(n+1)}{2.3.4...n}$ rồi lý luận như trên ta có đpcm.

48. Gọi 4 số nguyên liên tiếp là $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$, ta có:

$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1$

$= (n^2+3n) + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$

49. a) Để chứng minh $n^4 + 4$ là hợp số, ta chứng tỏ $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n-1)n}$ phân tích được ra tích hai thừa số lớn hơn 1 (với $n > 1$). Thêm bớt $4n^2$ vào biểu thức rồi phân tích ra thừa số được $(n^2+2n+2)\left[(n-1)^2+1\right]$.

Với $n > 1$, cả hai thừa số đều lớn hơn 1.

b) $n^4 + 4k^4 = \left(n^2 + 2nk + 2k^2\right)\left(n^2 - 2nk + 2k^2\right)$ rồi chứng minh mỗi thừa số đều lớn hơn 1.

50. a) $2^{32} + 1$.

b) Dựa vào câu a), rồi chứng minh $\left(1 + ab - b^4\right)a^4 + 1$ chia hết cho $1 + ab$.

Do đó $2^{32} + 1$ chia hết cho $1 + 2^7.5 = 641$.

51. Đặt $\underbrace{11...1}_{n} = k$ thì $9k + 1 = \underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n$

Ta có $A = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n} = \underbrace{11...1}_{n}.10^n + 2.\underbrace{11...1}_{n} = k.10^n + 2k$

$= k\left(10^n + 2\right) = k\left(9k + 1 + 2\right) = 3k\left(3k + 1\right)$.

Vậy A là tích 2 số nguyên liên tiếp $\underbrace{33...3}_{n}$ và $\underbrace{33...3}_{n-1}4$.

52. Cũng đặt $\underbrace{11...1}_{n} = k$, ta có

$$k.10^n + k - 2k = k.10^n - k = k\left(10^n - 1\right) = k.9k = (3k)^2 = \left(\underbrace{33..3}_{m}\right)^2$$

53. Đáp số: Tồn tại.

Xét 2004 số có dạng 2002, 20022002, ..., 20022002...2002.

54. Ta cần chứng minh tồn tại hai lũy thừa của 2001 mà hiệu chia hết cho 10^4. Xét 10^4 số: 2001^1, 2001^2, ..., 2001^{10^4}

55. Ta cần chứng minh tồn tại $n \in N^*$ sao cho $3^n - 1 \vdots 10^4$

Xét 10^4 số 3^1, 3^2, ..., 3^{10^4}.

56. Gọi 2001 số đã cho là a_1, a_2, ..., a_{2001}. Xét 2001 tổng sau:

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$ ....

$S_{2001} = a_1 + a_2 + ... + a_{2001}$

57. Trong 8 số đã cho tồn tại hai số A và B sao cho $A \equiv B \pmod 7$ đó.

Khi đó, số $C = \overline{AB} = 1000A + B = 1001A + (B - A)$ chia hết cho 7.

58. Từ 1 đến 100 có tất cả 26 số nguyên tố. Khi phân tích 27 số đã cho ra thừa số nguyên tố có ít nhất hai số cùng chứa một thừa số nguyên tố nào đó. Hai số này có ước chung lớn nhất khác 1.

§8. Bất đẳng thức

Một số kiến thức cơ bản

1. Tính chất

1. *Tính chất bắc cầu:* $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$.

2. *Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với các bất đẳng thức đã cho:*

$$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

Chú ý: Không được trừ từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều.

3. *Trừ từng vế hai bất đẳng thức ngược chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức bị trừ:*

$$c < d \Rightarrow a - c > b - d.$$

4. *Tính chất đơn điệu của phép nhân:*

a. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương:

$$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc.$$

b. Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều của bất đẳng thức:

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

5. *Nhân từng vế hai bất đẳng thức mà hai vế không âm:*

$$\left.\begin{matrix} a \ge b \ge 0 \\ c \ge d \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac \ge bd$$

6. *Nâng lên lũy thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức:*

$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n; a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n; a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ *với n lẻ;*

$|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n$ *với n chẵn.*

7. *So sánh hai lũy thừa cùng cơ số với số mũ nguyên dương:*

Nếu $m > n > 0$ thì:

$$a > 1 \Rightarrow a^m > a^n; a = 1 \Rightarrow a^m = a^n; 0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n.$$

8. *Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều bất đẳng thức nếu hai vế cùng dấu:* $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Chú ý: *Ngoài các bất đẳng thức chặt, chẳng hạn $a > b$, ta còn gặp các bất đẳng thức không chặt, chẳng hạn $a \ge b$ (tức là $a > b$ hoặc $a = b$). Trong các tính chất trên, nhiều dấu > (hoặc <) có thể thay bởi ≥ (hoặc ≤).*

2. Một số bất đẳng thức quen thuộc

1. *Ngoài các hằng bất đẳng thức* $a^2 \geq 0; -a^2 \leq 0$, *cần nhớ các hằng bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối:*

   $|a| \geq 0$. *Xảy ra đẳng thức khi* $a = 0$;

   $|a| \geq a$. *Xảy ra đẳng thức khi* $a \geq 0$;

   $|a+b| \leq |a| + |b|$. *Xảy ra đẳng thức khi* $ab \geq 0$;

   $|a-b| \geq |a| - |b|$. *Xảy ra đẳng thức khi* $ab > 0$;

   (các điều kiện này còn có thể diễn đạt là $a \geq b \geq 0$ *hoặc* $a \leq b \leq 0$*).*

   Chứng minh bất đẳng thức $|a+b| \leq |a| + |b|$ *như sau:*

   $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(1)* $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2$ *(vì hai vế của (1) không âm)* $\Leftrightarrow ab \leq |ab|$ *(2). Bất đẳng thức (2) đúng, vậy (1) là đúng.*

   Chứng minh bất đẳng thức $|a-b| \geq |a| - |b|$ *(3) như sau:*

   Nếu $|a| < |b|$ *thì (3) hiển nhiên đúng.*

   Nếu $|a| \geq |b|$ *thì (3) tương đương với:*

   $|a-b|^2 \geq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq a^2 - 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow |ab| \geq ab$ *(4)*

   Bất đẳng thức (4) đúng, vậy (3) là đúng.

2. *Cũng cần nhớ thêm một số hằng bất đẳng thức khác để khi giải toán có thể sử dụng chúng như một bổ đề, chẳng hạn:*

Định lý: *(Bất đẳng thức Côsi) Nếu* $a \geq 0$ *và* $b \geq 0$ *thì* $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$a^2 + b^2 \geq 2ab; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ *hay* $(a+b)^2 \geq 4ab$ *(bất đẳng thức Cô-si);*

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ *với* $a, b > 0$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ *với* $a, b > 0$

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ *(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)*

Các dạng bài tập cơ bản

Khi giải các bài toán về bất đẳng thức, cần chú ý $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, *cần nhớ bất đẳng thức* $a^2 \geq 0$ *(đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $a = 0$*) và các tính chất của bất đẳng thức.*

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức

Cách 1: *Dùng định nghĩa:*

Để chứng minh $A > B$, *ta xét hiệu* $A - B$ *và chứng minh rằng* $A - B$ *là số dương.*

Cách 2: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

Tức là biến đổi tương đương bất đẳng thức phải chứng minh để đi đến một bất đẳng thức mà ta đã biết là đúng (hoặc dễ dàng chứng minh là đúng).

Cách 3: Sử dụng phương pháp phản chứng

Cách 4: Có thể sử dụng phương pháp đổi biến phụ

Cách 5: Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc

Cách 6: Với các bất đẳng thức mà các biến có vai trò như nhau, ta có thể sắp thứ tự các biến.

Cách 7: Khi chứng minh bất đẳng thức, trong nhiều trường hợp ta cần xét từng khoảng giá trị của biến.

Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, ta cần chú ý một số vấn đề sau :

1. *Cho biểu thức f(x, y...) Ta nói M là giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức f(x, y...) kí hiệu max f = M, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

   Với mọi x, y... để f(x, y...) xác định thì: $f(x,y...) \le M$ *(M là hằng số)(1)*

   tồn tại x_0, y_0*... sao cho* $f(x_0,y_0...) = M$ *(2)*

2. *Cho biểu thức f(x, y...) Ta nói m là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức f(x, y...), kí hiệu min f = m, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

   Với mọi x, y... để f(x, y,...) xác định thì: $f(x,y...) \ge m$ *(m là hằng số) (1')*

   tồn tại x_0, y_0*... sao cho* $f(x_0,y_0...) = m$ *(2')*

3. *Tiếng latinh: minimum là nhỏ nhất, maximum là lớn nhất.*

4. *Chú ý rằng nếu chỉ có điều kiện (1) hay (1') thì chưa thể nói gì về cực trị của một biểu thức: Chẳng hạn, xét biểu thức:* $A = (x-1)^2 + (x-3)^2$.

   Mặc dù ta có $A \ge 0$, *nhưng chưa thể kết luận được minA = 0, vì không tồn tại giá trị nào của x để A = 0.*

Cách 1: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, ta có thể biến đổi như sau: $f(x) = g(x)^2 + C$ *hoặc* $f(x) = C - g(x)^2$.

Cách 2 Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, ta có thể đổi biến.

Cách 3: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, nhiều khi ta thay điều kiện để biểu thức này đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Chẳng hạn: – A lớn nhất ⇔ A nhỏ nhất,

$\frac{1}{B}$ *lớn nhất ⇔ B nhỏ nhất với B > 0,*

C lớn nhất $\Leftrightarrow C^2$ lớn nhất với $C > 0$.

Cách 4: *Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, nhiều khi ta cần xét từng khoảng giá trị của biến, sau đó so sánh các giá trị của biểu thức trong các khoảng ấy để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức đó.*

Cách 5: *Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, người ta thường sử dụng các bất đẳng thức đã biết.*

Cách 6. *Trong các hằng bất đẳng thức, cần chú ý đến hai mệnh đề sau, cho ta giá trị lớn nhất của tích, giá trị nhỏ nhất của tổng:*

– Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

– Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Để chứng minh hai mệnh đề trên, ta dùng bất đẳng thức $(a+b)^2 \ge 4ab$:

– Nếu hai số a và b có a + b = k (hằng số) thì từ $(a+b)^2 \ge 4ab$ *ta có* $ab \le \frac{k^2}{4}$, *do đó* $\max(ab) = \frac{k^2}{4}$ *khi và chỉ khi a = b.*

– Nếu hai số dương a và b có ab = p (hằng số) thì a + b nhỏ nhất $\Leftrightarrow (a+b)^2$ *nhỏ nhất, do đó* $\min(a+b)^2 = 4p$ *khi và chỉ khi a = b.*

Chú ý: *Trong trường hợp phân thức có mẫu là đa thức bậc hai và tử có bậc không quá hai như ở ví dụ trên, ta có một phương pháp xác định được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức (nếu có). Đó là phương pháp tìm miền giá trị của hàm số.*

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức

Cách1: Dùng định nghĩa

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \ge -1$.

Giải:

Xét hiệu:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (-1) = (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) + 1$.

Đặt $x^2 - 5x + 5 = y$. Biểu thức trên bằng $(y-1)(y+1)+1 = y^2 \ge 0$.

Vậy $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \ge -1$.

Cách2: Dùng các phép biến đổi tương đương

Ví dụ 2: Cho các số dương a và b thỏa mãn điều kiện a + b = 1. Chứng minh rằng $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$.

Giải:

Ta có: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$. (1)

$\Leftrightarrow \frac{a+1}{a}.\frac{b+1}{b} \geq 9 \Leftrightarrow ab + a + b + 1 \geq 9ab$ (vì ab > 0)

$\Leftrightarrow a + b + 1 \geq 8ab \Leftrightarrow 2 \geq 8ab$ (vì a + b = 1)

$\Leftrightarrow 1 \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (vì a + b = 1) $\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. (2)

Bất đẳng thức (2) đúng, mà các phép biến đổi trên tương đương, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a = b.

Cách giải khác:

$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \left(1+\frac{a+b}{b}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right) = \left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right)$.

Thực hiện phép nhân và chú ý rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ do a > 0, b > 0.

Chú ý: *Khi sử dụng phép biến đổi tương đương, cần lưu ý các biến đổi tương đương có điều kiện, chẳng hạn:* $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$ *với a, b > 0;*

$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n$ *với m, n nguyên dương, a > 1.*

Cần chỉ rõ các điều kiện ấy khi biến đổi tương đương.

Ví dụ 2: Cho a + b > 1. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$.

Giải:

Ta có: a + b > 1 > 0 (1)

Bình phương hai vế: $(a+b)^2 > 1 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 1$. (2)

Mặt khác: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. (3)

Cộng từng vế của (2) và (3): $2\left(a^2+b^2\right) > 1 \Rightarrow a^2 + b^2 > \frac{1}{2}$ (4)

Bình phương hai vế của (4): $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > \frac{1}{4}$ (5)

Mặt khác $\left(a^2-b^2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$ (6)

Cộng từng vế (5) và (6): $2\left(a^4+b^4\right) > \frac{1}{4} \Rightarrow a^4 + b^4 > \frac{1}{8}$.

Ví dụ 3: Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\ge 2xy$ (xảy ra đẳng thức khi $x=y$), ta có:

$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\ge 2.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=2.\frac{a}{c}$. Tương tự: $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 2.\frac{b}{a}$; $\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\ge 2.\frac{c}{b}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}.$$

Ví dụ 4: Chứng minh các bất đẳng thức với a, b, c là các số dương:

a. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$; b. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge 1,5$.

Giải

a. Ta có: $A=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Ta có $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ với x, y dương .

Do đó $A\ge 3+2+2+2=9$.

Vậy $A\ge 9$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

b. Áp dụng bất đẳng thức ở câu a: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$

trong đó x, y, z > 0. Với $x=b+c, y=a+c, z=a+b$ ta được:

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 4,5$$

$$\Rightarrow\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge 4,5$$

$\Rightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1\ge 4,5\Rightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge 1,5$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Giải

Xét $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}$ và chú ý rằng các mẫu đều dương, áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với x, y > 0, ta được: $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\ge\frac{4}{2b}=\frac{2}{b}$.

tương tự $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{2}{c}$, $\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\ge\frac{2}{a}$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên rồi chia cho 2, ta được điều phải chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a = b = c.

Ví dụ 6: Cho $x\ge0, y\ge0, z\ge0$.

Chứng minh rằng: $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$. (1)

Giải

Hai vế của (1) đều không âm nên để chứng minh (1), ta sẽ chứng minh rằng: $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge 64x^2y^2z^2$.

Ta có $(x+y)^2\ge 4xy$, $(y+z)^2\ge 4yz$, $(z+x)^2\ge 4zx$.

Hai vế của ba bất đẳng thức trên đều không âm, nhân từng vế ta được:

$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge 64x^2y^2z^2$.

$\Rightarrow[(x+y)(y+z)(z+x)]^2\ge[8xyz]^2$. Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều không âm nên $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi x = y = z.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với mọi giá trị của biến x, các đa thức sau đây nhận giá trị dương:

a. $x^2-6x+10$ b. x^2+x+1 c. $(x-3)(x-5)+4$

Giải :

Gợi ý: Hãy viết các đa thức trên dưới dạng tổng của một số dương với một bình phương của một biểu thức x.

a. Ta có: $x^2-6x+10=x^2-2.3x+3^2+1=(x-3)^2+1$

Với mọi x thì : $(x-3)^2\ge0$; do đó $x^2-6x+10\ge1$

b. $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

c. $(x-3)(x-5)+4=(x-4+1)(x-4-1)+4$

$=(x-4)^2-1+4=(x-4)^2+3\ge3$ với mọi x.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng với mọi $x \ge 0, y \ge 0$: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy$

Giải

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng, do đó bất đẳng thức đã cho là đúng.

$(x-y)^2 = 0$ khi và chỉ khi $x = y$. Do đó trong bất đẳng thức:

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy$, ta có dấu = khi và chỉ khi x = y.

Ví dụ 9: Cho a > b > 0, c > d > 0.Chứng minh rằng ac > bd.

Giải

$a > b$ và $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ (1)

$c > d$ và $b > 0 \Rightarrow bc > bd$ (2). Từ (1) và (2) theo tính chất bắc cầu của ">" suy ra: ac > bd (đpcm).

Ví dụ 10: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$ với $n \in N$, $n > 1$.

Giải

Ta xét một hạng tử:

$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k.k} < \frac{1}{k(k-1)}$ vì $k > k-1$. Mà $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Do đó $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Thay vào ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2};\quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3};\ldots \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Cộng vế theo vế, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mọi số t ta đều có: $t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$

(Thi vô địch toán lớp 9, Liên Xô 1990)

Giải

$$t^4 - t + \frac{1}{2} = \left(t^4 + \frac{1}{4} - t^2\right) + \left(t^2 + \frac{1}{4} - t\right) = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

Biểu thức này luôn dương vì $t^2 - \frac{1}{2}$ và $t - \frac{1}{2}$ không đồng thời bằng 0.

Ví dụ 12 : Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa $a \le b \le c \le d$ và $a + d = b + c$.

Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là tổng của ba số chính phương.

b) $bc \ge ad$.

Giải:

Cho a, b, c, d là các số nguyên thoả $a \le b \le c \le d$ và $a + d = b + c$.

a) Vì $a \le b \le c \le d$ nên ta có thể đặt $a = b - k$ và $d = c + h$ ($h, k \in N$)

Khi đó do $a + d = b + c \Leftrightarrow b + c + h - k = b + c \Leftrightarrow h = k$.

Vậy $a = b - k$ và $d = c + k$.

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (b - k)^2 + b^2 + c^2 + (c + k)^2$

$= 2b^2 + 2c^2 + 2k^2 - 2bk + 2ck$

$= b^2 + 2bc + c^2 + b^2 + c^2 + k^2 - 2bc - 2bk + 2ck + k^2$

$= (b + c)^2 + (b - c - k)^2 + k^2$ là tổng của ba số chính phương

(do $b + c$, $b - c - k$ và k là số nguyên)

b) Ta có $ad = (b - k)(c + k) = bc + bk - ck - k^2 = bc + k(b - c) - k^2 \le bc$ (vì $k \in N$ và $b \le c$). Vậy $ad \le bc$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ13: Cho a, b là hai số thực thỏa $a^3 + b^3 = 2$.

Chứng minh $0 < a + b \le 2$.

Giải:

Cho a, b là hai số thực sao cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh $0 < a + b \le 2$.

Ta có: $a^3 + b^3 > 0 \Rightarrow a^3 > -b^3 \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > 0$ (1)

$(a - b)^2(a + b) \ge 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) \ge 0 \Rightarrow a^3 + b^3 - ab(a + b) \ge 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \ge ab(a + b) \Rightarrow 3(a^3 + b^3) \ge 3ab(a + b)$

$\Rightarrow 4(a^3 + b^3) \ge (a + b)^3 \Rightarrow 8 \ge (a + b)^3 \Rightarrow a + b \le 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < a + b \le 2$.

Ví dụ 14: Chứng minh với mọi số thực x, y, z luôn có:

$$|x + y - z| + |y + z - x| + |z + x - y| + |x + y + z| \ge 2(|x| + |y| + |z|) \quad (*)$$

Giải:

Đặt: $a = x + y - z$, $b = y + z - x$, $c = z + x - y$. Trong ba số a, b, c bao giờ cũng có ít nhất hai số cùng dấu, chẳng hạn: $a \cdot b \ge 0$.

Lúc này : $|x + y - z| + |y + x - z| = |a| + |b| = |a + b| = 2|y|$

Ta có : $x + y + z = a + b + c$; $2x = a + c$; $2z = b + c$. Do đó để chứng minh (*) đúng, chỉ cần chứng tỏ : $|c| + |a + b + c| \ge |a + c| + |b + c|$ (**) đúng với $a \cdot b \ge 0$. Ta có:

(**) $\Leftrightarrow |c|\cdot|a+b+c|+ab\ge|a+c|\cdot|b+c|$

$\Leftrightarrow |ca+cb+c^2|+ab\ge|(ca+cb+c^2)+ab|$ (***)

Đặt: $ca+cb+c^2=A$; $ab=B$, ta có $B=|B|$ (do $a.b\ge0$) ta có: (***)

$\Leftrightarrow |A|+|B|\ge|A+B| \Leftrightarrow |A||B|.\ge AB \Leftrightarrow |AB|\ge AB$.

Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp các số: a, b, c, a + b + c chia làm 2 cặp cùng dấu. Ví dụ: $ab\ge0$ và $c(a+b+c)\ge0$.

Chú ý: *Có thể chia ra các trường hợp tùy theo dấu của a, b, c (có 8 trường hợp) để chứng minh(*).*

Ví dụ 15: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge a+b+c$$

Giải:

Ta có: $a>0; b>0: (a+b)(a-b)^2\ge0 \Leftrightarrow (a+b)\left[(a^2-ab+b^2)-ab\right]\ge0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\ge0 \Leftrightarrow a^3+b^3-ab(a+b)\ge0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b) \Leftrightarrow \dfrac{a^3+b^3}{2ab}\ge\dfrac{(a+b)}{2}$. Tương tự ta có:

$\dfrac{b^3+c^3}{2bc}\ge\dfrac{(b+c)}{2}; \dfrac{c^3+a^3}{2ca}\ge\dfrac{(c+a)}{2}$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có: $\dfrac{a^3+b^3}{2ab}+\dfrac{b^3+c^3}{2bc}+\dfrac{c^3+a^3}{2ca}\ge\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{c+a}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge a+b+c$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 16: Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{13}+\ldots+\dfrac{1}{2002^2+2003^2}<\dfrac{1}{2}$.

Giải:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{2002^2+2003^2}<\frac{1}{2}$$

- Ta có: $\dfrac{1}{n^2+(n+1)^2}=\dfrac{1}{2n^2+2n+1}<\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

Với $n=1: \dfrac{1}{2^2+1^2}=\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$. Với $n=2: \dfrac{1}{3^2+2^2}=\dfrac{1}{13}<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$

- Do đó: $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{13}+\ldots+\dfrac{1}{2002^2+2003^2}<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2003}\right)<\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 17 : Chứng minh rằng với mọi x, y $\neq 0$, ta có: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

Giải:

Biến đổi tương đương: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)xy+2x^2y^2-2xy\left(x^2+y^2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2-2xy\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right](x-y)^2\geq 0$

Ví dụ 18 : Chứng minh bất đẳng thức: $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$ với a > 0, b > 0

Giải

$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2-ab\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\geq 0$ (Bất đẳng thức này luôn đúng)

Vậy $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$ là bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 19: Chứng minh rằng a, b, c là các số dương bất kì, ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Giải:

Có thể giả thiết $a\geq b\geq c$. Khi đó: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}+\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}+\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a-b+a-c}{b+c}+\frac{b-c+b-a}{c+a}+\frac{c-a+c-b}{a+b}\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)\geq 0$

Bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên theo giả thiết ban đầu.

Ví dụ 20: Chứng minh rằng ta có: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ với a, b, c là ba cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác.

Giải

Ta có: $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\ge 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{b+c-a}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+c-b}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+b-c}-\dfrac{1}{c}\ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(a-b)^2}{(b+c-a)(a+c-b)}+\dfrac{2(b-c)^2}{(a+c-b)(a+b-c)}+\dfrac{2(c-a)^2}{(a+b-c)(b+c-a)}\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do các bất đẳng thức của ba cạnh trong một tam giác.

Ví dụ 21: Cho $a,\ b,\ c>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{c}+\dfrac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$.

Giải:

Dễ dàng chứng minh với $a, b>0$:

$a^3+b^3\ge ab(a+b)\ \Leftrightarrow\ \dfrac{a^3}{b}+b^2\ge a(a+b)$ (1)

Hoàn toàn tương tự: $\dfrac{b^3}{c}+c^2\ge b(b+c)$ (2) ; $\dfrac{c^3}{a}+a^2\ge c(c+a)$ (3)

Cộng (1), (2), (3) ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 22: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ với mọi a, b, c

b. $\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}(a>0,b>0,c>0)$

c. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$ với mọi a, b, c, d, e.

Giải:

a. $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$. Bất đẳng thức này đúng.

Do đó: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ là bất đẳng thức đúng.

b. Áp dụng câu a) ta có:

$a^8+b^8+c^8\ge a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=(a^2b^2)^2+(b^2c^2)^2+(c^2a^2)^2$

$\ge (a^2b^2)\ (b^2c^2)+(b^2c^2)(c^2a^2)+(a^2b^2)(c^2a^2)=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$

$\ge a^2b^2c^2(ab+bc+ca)$

Do đó: $\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\ge\dfrac{a^2b^2c^2(ab+bc+ca)}{a^3b^3c^3}\Leftrightarrow\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

c. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e)\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-ab-ac-ad-ae\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4}+b^2-ab\right)+\left(\frac{a^2}{4}+c^2-ac\right)+\left(\frac{a^2}{4}+d^2-ad\right)+\left(\frac{a^2}{4}+e^2-ae\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\ge 0$ Bất đẳng thức này đúng.

Do đó: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$ là bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 3: Cho các số dương a, b, c, chứng minh rằng:

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$$

Giải:

Ta có: $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+a}<\frac{a+c}{a+b+c}$ (1)

$\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$ (2); $\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{a+b+c}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2), (3): $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: với $a\ge b\ge 1$: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$ (*).

Giải:

(*) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-\frac{1}{1+ab}-\frac{1}{1+ab}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)}+\frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{a(b-a)}{(1+a^2)(1+ab)}+\frac{b(a-b)}{(1+b^2)(1+ab)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{1+ab}\left(\frac{a}{1+a^2}-\frac{b}{1+b^2}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{b-a}{1+ab}\left(\frac{a+ab^2-b-ba^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\ge 0$.

Vì $a\ge b\ge 1 \Rightarrow ab\ge 1 \Leftrightarrow ab-1\ge 0$.

Cách 3 Sử dụng phương pháp phản chứng

Ví dụ 5: Cho $a^2+b^2\le 2$. Chứng minh rằng $a+b\le 2$.

Giải

Giả sử a + b > 2, bình phương hai vế (hai vế đều dương), ta được:

$a^2 + 2ab + b^2 > 4$ (1). Mặt khác ta có:

$2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \le 2(a^2 + b^2)$. Mà $2(a^2 + b^2) \le 4$ (giả thiết),

do đó $a^2 + 2ab + b^2 \le 4$ (2). Mâu thuẫn với (1). Vậy phải có $a + b \le 2$.

Cách giải khác. Ta có: $a^2 + b^2 \le 2$ (1).

Mặt khác $2ab \le a^2 + b^2$ nên $2ab \le a^2 + b^2 \le 2$ (2).

Cộng (1) và (2): $a^2 + 2ab + b^2 \le 4 \Rightarrow (a+b)^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le a + b \le 2$.

Cách 4: Có thể sử dụng phương pháp đổi biến phụ

Ví dụ 1: Cho a + b + c = 1. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$.

Giải:

Đặt $a = \frac{1}{3} + x, b = \frac{1}{3} + y, c = \frac{1}{3} + z$. Do a + b + c = 1 nên x + y + z = 0.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{1}{3} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + y\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + z\right)^2$

$= \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}y + y^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}z + z^2\right)$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} + x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}$.

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2: Chứng minh bất đẳng thức:

$abc \ge (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Giải

Cách 1. Đặt $b + c - a = x, a + c - b = y, a + b - c = z$ thì x, y, z > 0. Theo bất đẳng thức $(x + y)(y + z)(z + x) \ge 8xyz$, ta có:

$2a.2b.2c \ge 8(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$

$\Rightarrow abc \ge (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a = b = c.

Cách 2. Ta có: $(b + c - a)(b + a - c) = b^2 - (c - a)^2 \le b^2$

$(c+a-b)(c+b-a)=c^2-(a-b)^2 \le c^2$

$(a+b-c)(a+c-b)=a^2-(b-c)^2 \le a^2$.

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$[(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]^2 \le [abc]^2$. Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều dương nên $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \le abc$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a = b = c.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ với mọi số thực x, y, z. Suy ra với a, b, c là các số dương ta luôn có: $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$.

Giải:

Khai triển vế phải: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ được vế trái

Ta có : $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \ge 0$.

Đặt : $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$; $x+y+z>0$ vì a, b, c dương .

Từ đó $x^3+y^3+z^3-3xyz \ge 0$ hay : $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c > 0.

Chứng minh rằng: $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10>0; \forall a$

Giải:

Tacó: $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10=[(a-1)(a-6)][(a-3)(a-4)]+10$

$=(a^2-7a+6)(a^2-7a+12)+10$; Đặt $t=a^2-7a+9$

$=(t-3)(t+3)+10=(t^2-9)+10=t^2+1>0; \forall t$. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 5: Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4 \ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

Giải:

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Rightarrow |t|=\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|$ mà $\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right| \ge 2$ (do bất đẳng thức Côsi) $\Rightarrow |t| \ge 2 \Rightarrow t \le -2$ hay $t \ge 2$. Khi đó: $t^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$

Bất đẳng thức

$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2 \ge 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \ge 0$ (2)

(2) là hiển nhiên đúng do $t \le -2$ hay $t \ge 2$.

Cách 5: Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc

Ví dụ 1: Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ge x(y + z + t)$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ge x(y + z + t)$ (1)

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \ge 4x(y + z + t)$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2t)^2 + x^2 \ge 0 \, (2)$. Ta có (2) luôn luôn đúng với mọi x, y, z, t. Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 2y = x - 2z = x - 2t = x = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \ge \left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^2$.

Giải:

Ta có: $3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\ge a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \ge \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2$$

Ví dụ 3 : Cho $x > 0; y > 0; x + y \le 1$. Chứng minh $\dfrac{1}{x^2 + xy} + \dfrac{1}{y^2 + xy} \ge 4$

(Đề TS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong –TPHCM 2003-2004)

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương a, b ta có $\dfrac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}} \Rightarrow (a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \ge 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}}$, suy ra

$(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \ge 4 \Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a + b}$. Áp dụng vào bài toán ta có

$\dfrac{1}{x^2 + xy} + \dfrac{1}{y^2 + xy} \ge \dfrac{4}{x^2 + xy + y^2 + xy} = \dfrac{4}{(x + y)^2} \ge 4$ (Do $x + y \le 1$)

Ví dụ 4: Cho $0 < a < b < c < d$. Chứng minh $(b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{(a+d)^2}{ad}$

Giải:

$$(b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{(a+d)^2}{ad} \Leftrightarrow \frac{(b+c)^2}{bc} - \frac{(a+d)^2}{ad} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2 ad - (a+d)^2 bc}{abcd} < 0 \Leftrightarrow (b+c)^2 ad - (a+d)^2 bc < 0$$

(vì a, b, c, d dương) $\Leftrightarrow b^2ad + c^2ad - a^2bc - d^2bc < 0$

$\Leftrightarrow bd(ab-cd) + ac(cd-ab) < 0 \Leftrightarrow (ab-cd)(bd-ac) < 0$

Mà $0 < a < d$ và $0 < b < c$, nên $ab < cd \Leftrightarrow ab - cd < 0$

$d > c > 0$ và $b > a > 0$, nên $bd > ac \Leftrightarrow bd - ac > 0$

Suy ra $(ab-cd)(bd-ac) < 0$ (đpcm).

Ví dụ 5: a. Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$.

b. Chứng minh rằng : $x^4 + y^4 \ge \frac{(x+y)^4}{8}$.

Giải:

a. ***Cách 1:***

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{2} = \frac{(x^2+y^2+2xy)+(x^2+y^2-2xy)}{2}$$

$$= \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2} \ge \frac{(x+y)^2}{2} \text{ vì } (x-y)^2 \ge 0$$

Cách 2: $x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 \ge x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng). Do đó $x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$ là đẳng thức đúng đúng.

b. Áp dụng câu a) ta có: $x^4 + y^4 = (x^2)^2 + (y^2)^2 \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ (1)

Theo a) ta có: $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 \geq \left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]^2$ (bình phương hai vế không âm). Vậy $(x^2+y^2)^2 \geq \frac{(x+y)^4}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) có: $x^4+y^4 \geq \frac{(x+y)^4}{8}$

Cách 6: Với các bất đẳng thức mà các biến có vai trò như nhau, ta có thể sắp thứ tự các biến

Ví dụ 1 : Chứng minh bất đẳng thức được nêu ở trên:

$abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ (1). Trong đó điều kiện a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác được thay bởi a, b, c là các số dương.

Giải

Cách 1. Do vai trò của a, b, c như nhau, ta giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Xét hai trường hợp:

a. $b+c \leq a$. Khi đó vế trái của (1) là số dương, còn vế phải không dương. Bất đẳng thức được chứng minh.

b. $b+c > a$. Khi đó hai vế của (1) đều dương. Giải tiếp như ví dụ 99.

Cách 2. Trong ba số $b+c-a, a+c-b, a+b-c$, không có quá một số âm. Thật vậy, chẳng hạn nếu $b+c-a<0, a+c-b<0$ thì $2c < 0$, trái với giả thiết. Nếu có đúng một số âm thì vế phải của (1) là số âm, bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng. Nếu không có số nào âm thì vế phải của (1) là số dương. Bạn đọc giải tiếp .

Cách 7: Khi chứng minh bất đẳng thức, trong nhiều trường hợp ta cần xét từng khoảng giá trị của biến.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $x^8-x^7+x^2-x+1>0$.

Giải

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức.

Cách 1. Nếu $x \geq 1$ thì ta viết A dưới dạng $x^7(x-1)+x(x-1)+1$.

Do $x \geq 1$ nên $A > 0$.

Nếu $x < 1$ thì ta viết A dưới dạng $x^8+x^2(1-x^5)+(1-x)$. Do $x < 1$ nên $1-x^5>0$, do đó $A > 0$.

Cách 2. $A = x^7(x-1)-(x-1)+x^2 = (x-1)(x^7-1)+x^2$.

Nếu $x \geq 1$ thì $x^7 \geq 1$, do đó $(x-1)(x^7-1) \geq 0$, còn $x^2 > 0$ nên $A > 0$.

Nếu $x < 1$ thì $x^7 < 1$, do đó $(x-1)(x^7-1) > 0$, còn $x^2 \geq 0$ nên $A > 0$.

Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cách 1: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, ta có thể biến đổi như sau : $f(x) = g(x)^2 + C$ ***hoặc*** $f(x) = C - g(x)^2$

Ví dụ 1: a. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 8x + 1$.

b. Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 - 4x + 1$.

c. Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu $a > 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a < 0$.

Giải

a. $A = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x-2)^2 - 7 \geq -7$.

min $A = -7$ khi và chỉ khi $x = 2$.

b. $B = -5x^2 - 4x + 1 = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) + \frac{9}{5} = -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \leq \frac{9}{5}$

max $B = \frac{9}{5}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{2}{5}$.

c. $P = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ nên:

– Nếu $a > 0$ thì $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, do đó $P \geq k$:

Min $P = k$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$;

– Nếu $a < 0$ thì $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, do đó $P \leq k$;

Max $P = k$ khi và chỉ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ b. $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$

Giải :

a. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6) = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3)$

$= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$.

Đa thức đạt giá trị nhỏ nhất là –36 khi $x^2 + 5x = 0$ tức là $x = 0$ hoặc $x = -5$.

b. $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6 = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 14$. Đa thức đạt giá trị nhỏ nhất là –14 khi $x - 2 = 0$ và $y - 4 = 0$, tức $x = 2$ và $y = 4$.

Ví dụ 3 : a. Phân tích đa thức P(x) thành nhân tử: $P(x) = 3x^2 - 27x + 54$

Với giá trị nào của x thì P(x) nhận giá trị không âm?

b. Tìm m và p sao cho biểu thức: $A = m^2 - 4mp + 5p^2 + 10m - 22p + 28$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị ấy.

Giải

a. $P(x) = 3x^2 - 27x + 54 = 3(x^2 - 9x + 18) = 3(x^2 - 3x - 6x + 18)$

$= 3\left[(x^2 - 3x) - (6x - 18)\right] = 3\left[x(x-3) - 6(x-3)\right]$.Suy ra :

$P(x) = 3(x-3)(x-6)$

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-6) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3 \geq 0\\ x-6 \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-3 \leq 0\\ x-6 \leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 6\\ x \leq 3\end{array}\right.$$

Vậy $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ hoặc $x \geq 6$

b. Ta biến đổi A về dạng: $A = m^2 - 4mp + 5p^2 + 10m - 22p + 28$

$= m^2 - 4mp + 4p^2 + 10m - 20p + p^2 - 2p + 1 + 27$

$= (m-2p)^2 + 10(m-2p) + (p-1)^2 + 25 + 2$

$= (m-2p)^2 + 10(m-2p) + 5^2 + (p-1)^2 + 2$

$A = (m - 2p + 5)^2 + (p-1)^2 + 2 \geq 2$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $\begin{cases}p - 1 = 0\\ m - 2p + 5 = 0\end{cases} \Leftrightarrow p = 1$ và $m = -3$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2x^2 - x + 5$

Giải

$$y = 2x^2 - x + 5 = 2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 5 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} \geq \frac{39}{8}$$

với mọi giá trị của x. Hàm số có giá trị nhỏ nhất: $\text{Min}y = \frac{39}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 5 : Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + 1$.

Giải:

Từ giả thiết ta suy ra $(x+y)^2 + 7(x+y) + y^2 + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 2.\frac{7}{2}(x+y) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10 = -y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left|x+y+\frac{7}{2}\right|\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le x+y+\frac{7}{2}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow -4\le x+y+1\le -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là –4, giá trị lớn nhất của P là –1 .

Ví dụ 6 : Cho $a^3 + b^3 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = a + b

Giải:

Đặt $a = 1 + x$ (1)

Ta có: $b^3 = 2-(1+x)^3 = 1-3x-3x^2-x^3 \le 1-3x+3x^2-x^3 = (1-x)^3$

Vậy: $b^3 \le (1-x)^3 \Leftrightarrow b \le 1-x$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $a + b \le 2$

Dấu " = " xảy ra khi x = 0 hay a = b = 1

Vậy: A đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi a = b = 1.

Ví dụ 7: Cho biểu thức: $M = x^2-5x+y^2+xy-4y+2014$. Với giá trị nào của x, y thì M đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:

Ta có $M=\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-2y+1\right)+\left(xy-x-2y+2\right)+2007$

$$M=(x-2)^2+(x-2)(y-1)+(y-1)^2+2007$$

$$\Rightarrow M=\left[(x-2)+\frac{1}{2}(y-1)\right]^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+2007$$

Do $(y-1)^2\ge 0$ và $\left[(x-2)+\frac{1}{2}(y-1)\right]^2\ge 0,\forall x,y$

$$\Rightarrow M\ge 2007\Rightarrow M_{min}=2007\Leftrightarrow x=2;y=1.$$

Cách 2: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, ta có thể đổi biến

Ví dụ 1 : Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^3 + y^3 + xy$ biết rằng x + y = 1.

Giải:

Sử dụng điều kiện đã cho để rút gọn biểu thức A:

$$A=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)+xy=x^2-xy+y^2+xy=x^2+y^2.$$

Đến đây có nhiều cách giải:

Cách 1. Biểu thị y theo x rồi đưa về tam thức bậc hai đối với x: Thay $y = 1 - x$ vào biểu thức A:

$$A=x^2+(1-x)^2=2\left(x^2-x\right)+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}.$$

$\min A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng điều kiện đã cho làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

Ta có: $x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$ (1) .

Mặt khác $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2).

Cộng (1) với (2): $2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$.

Vậy $\min A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 3. Sử dụng điều kiện đã cho để đưa vào một biến mới:

Đặt $x = \frac{1}{2} + a$ thì $y = \frac{1}{2} - a$. Biểu thị $x^2 + y^2$ theo a, ta được:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 = \frac{1}{2} + 2a^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Vậy $\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$.

Giải:

Ta có: $A = x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2(x^2 - 4x + 5)$

$= 2(x - 2)^2 + 2 \geq 2.$; $A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy min A = 2 khi và chỉ khi x = 2.

Chẳng hạn, ở ví dụ trên ta có thể $x - 2 = y$, khi đó

$A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = y^2 + 2y + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2y^2 + 2 \geq 2$.

$\min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = x(x - 3)(x - 4)(x - 7)$.

Giải:

$A = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$.

Đặt $x^2 - 7x + 6 = y$ thì $A = (y - 6)(y + 6) = y^2 - 36 \geq -36$.

$\min A = -36 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 6$.

Ví dụ 4: Cho x + y + z = 3.

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2 + z^2$.

b. Tìm giá trị lớn nhất của $B = xy + yz + zx$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của A + B.

Giải:

Bình phương hai vế của đẳng thức x +y + z = 3, ta được:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9\,(1)$. Tức là A + 2B = 9.

Dễ dàng chứng minh được: $A \geq B$ (2)

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi x = y = z.

a. Từ (1) và (2) suy ra $3A \geq A + 2B = 9$, nên $A \geq 3$.

Do đó min A = 3 khi và chỉ khi x = y = z = 1.

Chú ý: *có thể giải câu a bằng cách đổi biến: đặt x = 1 + a, y = 1 + b, z = 1 + c rồi xét* $x^2 + y^2 + z^2$.

b. Từ (1) và (2) suy ra $3B \leq A + 2B = 9$, nên $B \leq 3$. Do đó max B = 3 khi và chỉ khi x = y = z = 1.

Chú ý: *Có thể giải câu b dựa vào câu a: vì A + 2B = 9 nên B lớn nhất ⇔ A nhỏ nhất.*

c. Ta có A + 2B = 9 mà $B \leq 3$ (câu b) nên $A + B \geq 6$.

Do đó min (A + B) = 6 khi và chỉ khi x = y = z = 1.

Cách 3: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, nhiều khi ta thay điều kiện để biểu thức này đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Chẳng hạn: – A lớn nhất ⇔ A nhỏ nhất,

$\frac{1}{B}$ *lớn nhất ⇔ B nhỏ nhất với B > 0,*

C lớn nhất ⇔ C^2 *lớn nhất với C > 0.*

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$.

Giải

$$A = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4}.$$

Ta thấy $(3x-1)^2 \geq 0$ nên $(3x-1)^2 + 4 \geq 4$. Do đó $\frac{1}{(3x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$ (theo tính chất $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ với a và b cùng dấu $\Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4} \geq \frac{-2}{4}$

$\Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$. Vậy $\min A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$.

Giải:

Cách 1. Đặt $x - 1 = y$ thì $x = y + 1$. Ta có:

$$A = \frac{3(y+1)^2 - 8(y+1) + 6}{y^2} = \frac{3y^2 - 2y + 1}{y^2} = 3 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2},$$

Lại đặt $\dfrac{1}{y} = z$ thì: $A = 3 - 2z + z^2 = (z-1)^2 + 2 \geq 2$.

$\min A = 2 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Cách 2. Viết A dưới dạng tổng của 2 với một biểu thức không âm:

$$A = \frac{(2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 2x + 1} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2.$$

$\min A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Ví dụ 3 : Tìm giá trị của x để biểu thức: $P = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ $(x \neq -1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Cách 1: $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 - \dfrac{x}{(x+1)^2}$

$$= 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] + \frac{3}{4}$$

$= \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+1}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$. P đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{3}{4}$ khi $x = 1$.

Cách 2: Ta xét biểu thức:

$$P - 1 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} - 1 = \frac{-x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-1}{x + \dfrac{1}{x} + 2}$$

$P - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x + \dfrac{1}{x} + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất, hay $x + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Xét tích $x.\dfrac{1}{x} = 1$ không đổi. Vậy $x + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\dfrac{1}{x} = x$ cho ta $x = \pm 1$. (loại giá trị $x = -1$). Tóm lại $P - 1$ có giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{1}{4}$ khi $x = 1$. Khi ấy $P - 1 = \dfrac{1}{4}$ hay $P = \dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của: $A = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$.

Giải:

Để tìm giá trị nhỏ nhất ta viết A dưới dạng:

$A = \dfrac{x^2-4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \ge -1$. Vậy $\min A = -1$ khi và chỉ khi $x = 2$. Để tìm giá trị lớn nhất, viết A dưới dạng:

$$A = \frac{4x^2+4-4x^2-4x-1}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \le 4.$$

Max $A = 4$ khi và chỉ khi $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{x^4+1}{(x^2+1)^2}$.

Giải:

Chú ý rằng $A > 0$ nên A lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{A}$ nhỏ nhất

A nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{A}$ lớn nhất. Ta có:

$$\frac{1}{A} = \frac{(x^2+1)^2}{x^4+1} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4+1}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của A: Ta có $2x^2 \ge 0, x^4+1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4+1} \ge 0$. Suy ra $\dfrac{1}{A} \ge 1 + 0 = 1.$; $\min \dfrac{1}{A} = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$. Do đó maxA = 1 khi và chỉ khi $x = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của A: Ta có $2x^2 \le x^4+1$ (dễ chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$) mà $x^4+1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4+1} \le 1$. Suy ra $\dfrac{1}{A} \le 1+1 = 2$; max $A = 2$ khi và chỉ khi $x^2 = 1$. Do đó $\min A = \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

Chú ý:

1. Cách khác tìm giá trị lớn nhất của A:

$A = \dfrac{(x^2+1)^2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 1 - \dfrac{2x^2}{(x^2+1)^2} \le 1$. Max A = 1 khi và chỉ khi x = 0.

2. Cách khác tìm giá trị nhỏ nhất của A:

Cách 1. Đặt $\dfrac{1}{x^2+1} = y$.

Cách 2. $A = \dfrac{2x^4+2}{2(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)^2+(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2} \ge \dfrac{1}{2}$.

$\min A = \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

Ví dụ 6 : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \dfrac{x^2-2x+2006}{x^2}$ (với $x \neq 0$)

Giải:

$$B = \frac{x^2-2x+2006}{x^2}(x \neq 0)$$

Ta có: $B = \dfrac{x^2-2x+2006}{x^2} \Leftrightarrow B = \dfrac{2006x^2-2.2006x+2006^2}{2006x}$

$\Leftrightarrow B = \dfrac{(x-2006)^2+2006x^2}{x^2} \Leftrightarrow B = \dfrac{(x-2006)^2+2005}{2006x^2} + \dfrac{2005}{2006}$

Vì $(x-2006)^2 \ge 0$ với mọi x; $x^2 > 0$ với mọi x khác 0

$\Rightarrow \dfrac{(x-2006)^2}{2006x^2} \ge 0 \Rightarrow B \ge \dfrac{2005}{2006} \Rightarrow$ B nhỏ nhất $= \dfrac{2005}{2006}$ khi $x = 2006$.

Ví dụ 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

a. $y = -2x^2 + x - 1$ b. $y = \dfrac{x+1}{x^3-x^2+2x+4}$.

Giải:

a. $y = -2x^2+x-1 = -2\left(x^2-\dfrac{1}{2}x\right)-1 = -2\left[x^2-2.\dfrac{1}{4}x+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]-1$

$$= -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{7}{8} \le -\frac{7}{8},\ \forall x.$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\dfrac{7}{8}$ khi $x-\dfrac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

b. $y = \dfrac{x+1}{x^3-x^2+2x+4} = \dfrac{x+1}{(x^2-2x+4)(x+1)} = \dfrac{1}{x^2-2x+4}$

$$= \frac{1}{(x-1)^2+3} \le \frac{1}{3},\ \forall x \neq -1.$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $x = 1$.

Ví dụ 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a. $y = \frac{x^2}{4} + x - 1$ b. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Giải:

a. $y = \frac{x^2}{4} + x - 1 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 4x\right) - 1 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 4x + 4 - 4\right) - 1$

$$= \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2 \geq -2, \ \forall x.$$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất $\text{Min}y = -2$ khi $x = -2$.

b. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{\left(x^2 + 2x + 3\right) - 1}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$

Hàm số có giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{(x+1)^2 + 2}$ có giá trị lớn nhất, tức là khi $(x+1)^2 + 2$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $x = -1$.

Vậy hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất $\text{Min}y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ khi $x = -1$.

Ví dụ 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 9}$

Giải

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 9} = \frac{\frac{1}{2}\left(2x^2 + 4x + 9\right) - \frac{11}{2}}{2x^2 + 4x + 9} = \frac{1}{2} - \frac{11}{4x^2 + 8x + 18}$$

$= \frac{1}{2} - \frac{11}{4(x+1)^2 + 14}$. Hàm số có giá trị nhỏ nhất khi $\frac{11}{4(x+1)^2 + 14}$ có giá trị lớn nhất, hay khi $4(x+1)^2 + 14$ có giá trị nhỏ nhất, đạt được khi $x = -1$. Vậy: $\text{Min}y = \frac{1}{2} - \frac{11}{14} = -\frac{2}{7}$ đạt được khi $x = -1$.

Ví du 10 : Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x^2}{1 + x^4}$

Giải

Viết P dưới dạng $\frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2}$. P đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{1}{x^2} + x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tích $\frac{1}{x^2}.x^2 = 1$ (không đổi). Vậy tổng $\frac{1}{x^2} + x^2$ nhỏ nhất khi $\frac{1}{x^2} = x^2 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Lúc đó $P = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$

Giải:

Ta có $x^2-x+1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall x$, $P = \dfrac{x^2+1}{x^2-x+1} = \dfrac{3(x^2+1)}{3(x^2-x+1)}$

$$= \frac{2(x^2-x+1)+x^2+2x+1}{3(x^2-x+1)} = \frac{2}{3} + \frac{(x+1)^2}{3(x^2-x+1)} \geq \frac{2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = – 1 .Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2}{3}$, khi $x = -1$. Mặt khác ta có :

$$P = \frac{x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{2x^2-2x+2-x^2+2x-1}{x^2-x+1} = \frac{2(x^2-x+1)-(x-1)^2}{x^2-x+1}$$

$= 2 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2-x+1} \leq 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 1. Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 khi x = 1.

Ví dụ 12 : Cho $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \dfrac{1}{x^3}}$$

Giải:

Ta có: $P = \dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \dfrac{1}{x^3}} = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$

$= 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \geq 6 \quad (x>0)$. Vậy $P_{min} = 6$ đạt được khi $x = 1$.

Cách 4: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, nhiều khi ta cần xét từng khoảng giá trị của biến, sau đó so sánh các giá trị của biểu thức trong các khoảng ấy để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức đó.

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = (3x-1)^2 - 4|3x-1| + 5$

Giải:

Đặt $|3x-1| = y$ thì

$A = |3x-1|^2 - 4|3x-1| + 5 = y^2 - 4y + 5 = (y-2)^2 + 1 \geq 1.$

$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x-1| = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{3}.$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = |x-2| + |x-3|$

Giải

Cách 1. a. Xét khoảng $x < 2$ thì $B = 2 - x + 3 - x = 5 - 2x$.

Do $x < 2$ nên $-2x > -4$, do đó $B > 1$ (1)

b. Xét khoảng $2 \leq x \leq 3$ thì $B = x - 2 + 3 - x = 1$ (2)

c. Xét khoảng $x > 3$ thì $B = x - 2 + x - 3 = 2x - 5$.

Do $x > 3$ nên $2x > 6$, do đó $B > 1$ (3)

So sánh (1), (2), (3) ta được min B = 1 khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 3$.

Cách 2. Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên

$B = |x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \geq (x-2) + (3-x) = 1$

Do đó $\min B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |x-1| + |x-7| + |x-9|$

Giải

Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên

$|x-1| + |x-9| = |x-1| + |9-x| \geq x - 1 + 9 - x = 8$ (1)

Ta lại có $|x-7| \geq 0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 8$.

Do đó $\min A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 9 - x \geq 0 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{2}|x+3| - 4$

Giải

Vì $|x+3| \geq 0$ với mọi giá trị của x nên $y = \frac{1}{2}|x+3| - 4 \geq -4$ với mọi giá trị của x. Hàm số có giá trị nhỏ nhất: $\text{Min} y = -4$ đạt được khi $x = -3$.

Cách 5: Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức, người ta thường sử dụng các bất đẳng thức đã biết.

Ví dụ 1: Chứng minh: $(ab+cd)^2 \le (a^2+c^2)(b^2+d^2)$ bất đẳng thức

Bu-nhi-a-cốp-xki.

Áp dụng: Cho $x+4y=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = 4x^2+4y^2$

Giải

Ta có: $(ab+cd)^2 \le (a^2+c^2)(b^2+d^2)$

$\Leftrightarrow a^2b^2+2abcd+c^2d^2 \le a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2d^2-2abcd+c^2b^2 \Leftrightarrow 0 \le (ad-bc)^2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi ad = bc. Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:

$5^2 = (x+4y)^2 = (x+4y) \le (x^2+y^2)(1+16) \Rightarrow x^2+y^2 \ge \frac{25}{17}$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2 \ge \frac{4.25}{17} \Rightarrow 4x^2+4y^2 \ge \frac{100}{17}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{5}{17}, y = \frac{20}{17}$

Ví dụ 2: Cho $x^2+y^2=52$. Tìm giá trị lớn nhất của A = 2x + 3y.

Giải

Ta nhận thấy $2x+3y$ và x^2+y^2 là các thành phần của bất đẳng thức

Bu-nhi-a-cốp-xki $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ với a = 2, b = 3.

Theo bất đẳng thức trên:

$(2x+3y)^2 \le (2^2+3^2).52 \Rightarrow (2x+3y)^2 \le 13.13.4$

$\Rightarrow |2x+3y| \le 26 \Rightarrow 2x+3y \le 26$. Vậy $\max A = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 2x+3y \ge 0 \end{cases}$

Thay $y = \frac{3x}{2}$ vào $x^2+y^2=52$, ta được $x^2+\frac{9x^2}{4}=52$. Giải phương trình này được: $x = \pm 4$. Với x = 4 thì y = 6, thỏa mãn (2). Với $x=-4$ thì $y=-6$, không thỏa mãn (2).

Cách 6. Trong các hằng bất đẳng thức, cần chú ý đến hai mệnh đề sau, cho ta giá trị lớn nhất của tích, giá trị nhỏ nhất của tổng:

– Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

– Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Để chứng minh hai mệnh đề trên, ta dùng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$:

– Nếu hai số a và b có a + b = k (hằng số) thì từ $(a+b)^2 \geq 4ab$ *ta có* $ab \leq \frac{k^2}{4}$, *do đó* $\max(ab) = \frac{k^2}{4}$ *khi và chỉ khi a = b.*

– Nếu hai số dương a và b có ab = p (hằng số) thì a + b nhỏ nhất $\Leftrightarrow (a+b)^2$ *nhỏ nhất, do đó* $\min(a+b)^2 = 4p$ *khi và chỉ khi a = b.*

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Giải:

Các biểu thức $x^2 - 3x + 1$ và $21 + 3x - x^2$ có tổng không đổi (bằng 22) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi

$x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 5; x_2 = -2.$ Khi đó A = 11.11 = 121.

Vậy max A = 121 khi và chỉ khi x = 5 hoặc $x = -2$.

Ví dụ 2 :Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{16x^2 + 4x + 1}{2x}$ với x > 0.

Giải

Viết B dưới dạng $8x + 2 + \frac{1}{2x}$. Hai số 8x và $\frac{1}{2x}$ là hai số dương, có tích không đổi (bằng 4) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$8x = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (chú ý rằng x > 0).

Vậy $\min B = \frac{1+1+1}{\frac{1}{2}} = 6$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất của A = ab + bc + cd, biết rằng a, b, c, d là các số không âm có tổng bằng 1.

Giải

Cách 1. Giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Ta có

$A = ab + bc + cd \leq ab + ac + ad = a(b + c + d)$

$= a(1-a) = a - a^2 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$. (Không cần tìm điều kiện cần và đủ để $A = \frac{1}{4}$, tức là không cần giải tất cả các điều kiện bc = ac, cd = ad,

$a = \frac{1}{2}$, $b + c + d = \frac{1}{2}$ và b, c, $d \ge 0$. Ta chỉ cần chỉ ra $A = \frac{1}{4}$ khi, chẳng hạn, $a = b = \frac{1}{2}, c = d = 0$. Vậy $\max A = \frac{1}{4}$ khi, chẳng hạn, $a = b = \frac{1}{2}, c = d = 0$.)

Cách 2. $A = ab + bc + cd \le ab + ad + bc + cd = (a + c)(b + d)$

Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$ ta có:

$$A = (a + c)(b + d) \le \left(\frac{a + c + b + d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = \frac{1}{2} \\ b + d = \frac{1}{2} \\ ad = 0 \\ a, b, c, d \ge 0 \end{cases}$$

Vậy $\max A = \frac{1}{4}$ khi, chẳng hạn, $a = b = \frac{1}{2}, c = d = 0$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{y}{5 - (x + y)}$ với x, y là các số tự nhiên.

Giải:

Ta có $x + y \ne 5$. Xét $x + y \le 4$:

– Nếu $y = 0$ thì $A = 0$.

– Nếu $1 \le y \le 3$ thì $A = \frac{y}{5 - (x + y)} \le 3$.

– Nếu $y = 4$ thì $x = 0$ và $A = 4$.

Xét $x + y \ge 6$ thì $A = \frac{y}{5 - (x + y)} \le 0$. So sánh các giá trị trên của A, ta thấy max A = 4 khi và chỉ khi x = 0, y = 4.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tích xy, biết rằng x và y là các số nguyên dương thỏa mãn x + y = 2005.

Giải:

Ta có: $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2 = 2005^2 - (x - y)^2$

Giả sử x > y (không thể xảy ra x = y). Ta có:

xy lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x - y$ nhỏ nhất; xy nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x - y$ lớn nhất.

Do $1 \le y < x \le 2004$ nên $1 \le x - y \le 2003$.

Ta có: $\min(x - y) = 1$ khi và chỉ khi x = 1003, 1002.

$\max(x-y) = 2003$ khi và chỉ khi $x = 2004$, $y = 1$.

Do đó: max (xy) = 1005 006 khi và chỉ khi x = 1003, y = 1002.

Min (xy) = 2004 khi và chỉ khi x = 2004, y = 1.

Ví dụ 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = |11^m - 5^n|$ với m, n là các số nguyên dương.

Giải: Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, còn 5^n tận cùng bằng 5. Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì tận cùng bằng 4.

Ta chỉ ra một trường hợp A = 4: với m = 2, n = 3 thì $A = |121 - 125| = 4$.

Như vậy min A = 4 khi, chẳng hạn, m = 2, n = 3.

Trong các ví dụ trên, ta chỉ ra tất cả các giá trị của biến để xảy ra đẳng thức. Tuy nhiên, yêu cầu của bài toán tìm GTNN, GTLN không đòi hỏi như vậy, chỉ cần chứng tỏ rằng tồn tại giá trị của biến để xảy ra đẳng thức.

Bài tập vận dụng

1. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$.

2. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

3. Chứng minh bất đẳng thức: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2zx + 2yz$.

4. Chứng minh bất đẳng thức: $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

5.Chứng minh rằng : Nếu $a + b \geq 1$ thì $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

6. Cho a, b, c, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng $ab + bc + ca + a + b + c \leq 6$

7. Cho $a, b > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + c^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

8. Cho a; b; c > 0 và $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$$

9. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{x^2}{1 + 16x^4} + \frac{y^2}{1 + 16y^4} \leq \frac{1}{4}$, $\forall x, y \in R$

10. Cho a, b, c là số đo độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh bất đẳng thức:

a. $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

b. $abc \ge (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$.

c. $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0$.

11. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \le \frac{1}{abc}.$$

12. Chứng minh bất đẳng thức: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2 + b^2}{2}$.

13. Chứng minh bất đẳng thức: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \ge (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$.

14. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1} > 0$.

15. Cho hai số a và b cùng dấu. Chứng minh rằng nếu $a < b$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

16. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2(a + b + c)$.

17 a) Cho $a + b = 1$. Chứng minh bất đẳng thức $a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}$.

b) Cho $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \ge \frac{1}{n}.$$

c) Cho $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = k$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \ge \frac{k^2}{n}.$$

18. Cho $a + b > 2$. Chứng minh bất đẳng thức $a^2 + b^2 > 2$.

19. Cho $a > 2,\ b > 2$. Chứng minh bất đẳng thức $ab > a + b$.

20. Chứng minh bất đẳng thức: $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 \ge 0$.

21. Chứng minh bất đẳng thức: $4a(a + b)(a + 1)(a + b + 1) + b^2 \ge 0$.

22. Chứng minh bất đẳng thức: $4a^2b^2 > (a^2 + b^2 - c^2)^2$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

23. Chứng minh bất đẳng thức: $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

24. Cho ba số dương a, b, c có tích bằng 1 và $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

a) Chứng minh: $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$.

b) Chứng minh trong ba số a, b, c có một số lớn hơn 1, hai số nhỏ hơn 1.

25. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ với $ab>0$.

26. Chứng minh bất đẳng thức: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ với $a,b,c>0$.

27. Tìm giá trị nhỏ nhất của: x^2-2x+y^2+4y+5.

28. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{x-y}{x+y}<\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với $x>y>0$.

29. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$ với mọi số tự nhiên $n\ge 2$.

30. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}$ với mọi số tự nhiên $n\ge 2$.

31. Tìm giá trị lớn nhất của: $\frac{3}{4x^2-4x+5}$.

32. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $\frac{1}{2x-x^2-4}$.

33. Tìm giá trị lớn nhất của: $\frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}$.

34. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $\frac{4x^2-2x+1}{x^2}$.

35. Tìm giá trị lớn nhất của: $\frac{2x+1}{x^2+2}$.

36. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của: $\frac{4x+3}{x^2+1}$.

37. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $\frac{x^4+2x^3+8x+16}{x^4-2x^3+8x^2-8x+16}$.

38. a) Chứng minh rằng nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số ấy bằng nhau.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $8x+\frac{2}{x}$ với $x>0$.

Hướng dẫn và đáp số

1. $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \ge ab - ac + 2bc$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - a(b-c) + b^2 + c^2 - 2bc \ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b-c)\right)^2 \ge 0.$

2. $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b \Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \ge 0.$

3. $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy - 2zx + 2yz$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz \ge 0 \Leftrightarrow (x - y + z)^2 \ge 0.$

4. $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \ge 2x(xy^2 - x + z + 1)$

$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 + (x - z)^2 + (x-1)^2 \ge 0.$

5. $a + b \ge 1 \Rightarrow b \ge 1 - a \Rightarrow b^3 \ge (1-a)^3 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 \ge 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ge \frac{1}{4}$, ĐPCM.

6. Ta có: $a^2 + b^2 \ge 2ab; b^2 + c^2 \ge 2bc; c^2 + a^2 \ge 2ac$

$\Rightarrow 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 2\left(ab + bc + ca\right) \Rightarrow ab + bc + ca \le 3 \ (1)$

Tương tự: $a^2 + 1 \ge 2a; b^2 + 1 \ge 2b; c^2 + 1 \ge 2c$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2\left(a + b + c\right) \Rightarrow a + b + c \le 3 (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ab + bc + ca + a + b + c \le 6$.

7. Ta có: $\frac{a}{a^2 + b^2} \le \frac{a}{2ab} = \frac{1}{2b}, \ \frac{b}{b^2 + c^2} \le \frac{b}{2bc} = \frac{1}{2c}, \ \frac{c}{a^2 + c^2} \le \frac{c}{2ac} = \frac{1}{2a}$

Vậy: $\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + c^2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$

8. Đặt $X = a^2 + 2bc; Y = b^2 + 2ac; Z = c^2 + 2ab$, ta có:

$X + Y + Z = \left(a + b + c\right)^2 \le 1$. Áp dụng bất đẳng thức

$(X + Y + Z)\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right) \ge 9$, ta có: $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \ge 9$

9. Ta có: $\frac{x^2}{1 + 16x^4} = \frac{x^2}{1 + (4x^2)^2} \le \frac{x^2}{2.4x^2} = \frac{1}{8}$

$$\frac{y^2}{1-16y^4}=\frac{y^2}{1+(4y^2)^2}\le\frac{y^2}{2.4y^2}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\quad\frac{x^2}{1+16x^4}+\frac{y^2}{1+16y^4}\le\frac{1}{4}$$

10.a. Ta có: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow\ (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$

$$\text{và } a>|b-c|, b>|a-c|, c>|a-b|$$

$$\Rightarrow a^2>b^2-2bc+c^2,\ b^2>a^2-2ac+c^2,\ c^2>a^2-2ab+b^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

b. Ta có: $a^2>a^2-(b-c)^2\Rightarrow a^2>(a+c-b)(a+b-c)$

$$b^2>b^2-(a-c)^2\Rightarrow b^2>(b+c-a)(a+b-c)$$

$$c^2>c^2-(a-b)^2\Rightarrow c^2>(b+c-a)(a+c-b)$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2>(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow abc>(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

c. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4>0$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2+2c^2(b^2+a^2)-a^4-b^4-2a^2b^2-c^4>0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2+2c^2(b^2+a^2)-(a^2+b^2)^2-c^4>0$$

$$\Leftrightarrow (2ab)^2-\left[\left(a^2+b^2\right)-c^2\right]^2>0\ \Leftrightarrow\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right]>0$$

$\Leftrightarrow (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)>0$, đúng

vì a, b, c là cạnh của tam giác

$$\Rightarrow c-a+b>0,\ c+a-b>0,\ a+b-c>0,\ a+b+c>0.$$

11. Ta có: $\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ge(a+b)ab$

$$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge(a+b)ab+abc=ab(a+b+c)$$

Tương tự: $\quad b^3+c^3+abc\ge(b+c)bc+abc=bc(a+b+c)$

$$c^3+a^3+abc\ge(c+a)ca+abc=ca(a+b+c)$$

$$VT\le\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)$$

12. Xét hiệu: $\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2+2ab+b^2\right)}{4}$

$$=\frac{1}{4}\left(a^2-2ab+b^2\right)=\frac{1}{4}(a-b)^2$$

Do $(a-b)^2\ge 0$ nên $\frac{1}{4}(a-b)^2\ge 0$, tức là $\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge 0$.

Vậy $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$ (đpcm).

13. Xét hiệu: $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^{2}+b^{2}\right)-\left(a^{8}+b^{8}\right)\left(a^{4}+b^{4}\right)$

Phân tích ra thừa số ta được $a^2b^2\left(a^2-b^2\right)\left(a^6-b^6\right)$

hay $a^2b^2\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)$. Rõ ràng biểu thức không âm.

Vậy $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^{2}+b^{2}\right)\geq\left(a^{8}+b^{8}\right)\left(a^{4}+b^{4}\right)$.

14. Tử số là số dương vì:

$$a^2+a+1=a^2+2.a.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$$

Mẫu số cũng là số dương vì:

$$a^2-a+1=a^2-2.a.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$$

Do đó: $\dfrac{a^2+a+1}{a^2-a+1}>0$ (đpcm).

15. Xét hiệu $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$. Do $a<b$ nên $b-a>0$. Do a và b cùng dấu nên $ab>0$. Vậy $\dfrac{b-a}{ab}>0$, tức là $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0$. Do đó: $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

16. ***Cách 1*** (Xét hiệu hai vế)

$a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)=a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$. Biểu thức trên là tổng của ba số không âm nên không âm. Vậy $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2 (Biến đổi tương đương)

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$

Bất đẳng thức cuối đúng vì vế trái là tổng ba số không âm.

Vậy $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$ (đpcm).

Cách 3 (Xuất phát từ một bất đẳng thức đã biết)

Ta có: $(a-1)^2\geq 0\ \Rightarrow\ a^2-2a+1\geq 0\ \Rightarrow\ a^2+1\geq 2a$ (1)

$(b-1)^2\geq 0\ \Rightarrow\ b^2-2b+1\geq 0\ \Rightarrow\ b^2+1\geq 2b$ (2)

$(c-1)^2\geq 0\ \Rightarrow\ c^2-2c+1\geq 0\ \Rightarrow\ c^2+1\geq 2c$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta được: $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=1;\ b=1;\ c=1$.

Cách 4: (Sử dụng phương pháp phản chứng)

Giả sử $a^2+b^2+c^2+3<2(a+b+c)$

$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)<0$

$\Rightarrow\ a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1<0$

$\Rightarrow\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2<0$

Bất đẳng thức cuối không đúng.

Do đó phải có $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$ (đpcm).

17. a) *Cách 1:* Từ $a+b=1$ suy ra $(a+b)^2=1$ hay $a^2+2ab+b^2=1$ (1)

Từ $(a-b)^2\ge 0$ suy ra $a^2-2ab+b^2\ge 0$ (2)

Cộng (1) với (2) ta có: $2(a^2+b^2)\ge 1\ \Rightarrow\ a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Cách 2: Đặt $a=\frac{1}{2}+x$ thì $b=1-a=1-\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}-x$.

Khi đó $a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=2x^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0\ \Leftrightarrow\ a=b=\frac{1}{2}$.

b) Đặt $a=\frac{1}{3}+x$; $b=\frac{1}{3}+y$; $c=\frac{1}{3}+z$. Do $a+b+c=1$ nên $x+y+z=0$.

Xét $a^2+b^2+c^2=\left(\frac{1}{3}+x\right)^2+\left(\frac{1}{3}+y\right)^2+\left(\frac{1}{3}+z\right)^2$

$=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}y+y^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}z+z^2$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0\ \Leftrightarrow\ a=b=c=\frac{1}{3}$.

c) Đặt $a_1=\frac{1}{n}+x_1$; $a_2=\frac{1}{n}+x_2$; ...; $a_n=\frac{1}{n}+x_n$.

Do $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=1$ nên $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=0$.

Giải tương tự câu b), ta có đpcm.

d) Tương tự câu c).

18. Bình phương hai vế của $a+b>2$ (vì hai vế không âm) ta được

$a^2+2ab+b^2>4$ (1). Mặt khác $(a-b)^2\ge 0$ nên $a^2-2ab+b^2\ge 0$ (2)

Cộng (1) với (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

19. ***Cách 1:*** Nhân hai vế của $a > 2$ với b $(b > 0)$ ta được $ab > 2b$ (1).

Nhân hai vế của $b > 2$ với a $(a > 0)$ ta được $ab > 2a$ (2)

Cộng (1) với (2) ta có điều phải chứng minh .

Cách 2: Do $a > 2$ và hai vế cùng dấu nên $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ (1) . Do $b > 2$ và hai vế cùng dấu nên $\frac{1}{b} < \frac{1}{2}$ (2) . Cộng (1) và (2) ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ hay $\frac{a+b}{ab} < 1$ (3). Nhân hai vế của (3) với $ab > 0$, ta được $a + b < ab$.

Cách 3: Do vai trò a và b là như nhau, nên ta giả sử $a > b$.

Nhân hai vế của $b > 2$ với a $(a > 0)$ ta được $ab > 2a$ (1)

Mà $2a = a + a \geq a + b$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $ab > a + b$.

Cách 4: Đặt $a = 2 + x; \ b = 2 + y$. Vì $a > 2; \ b > 2$ nên $x, \ y > 0$.

Xét hiệu $ab - (a + b) = (2 + x)(2 + y) - (2 + x + 2 + y) = x + y + xy$

Vì $x, \ y > 0$ nên $x.y > 0$. Do đó $x + y + xy > 0$, tức là $ab > a + b$.

20. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 9 = A$

Đặt $x^2 - 7x + 9 = y$ thì $A = (y-3)(y+3) + 9 = (y^2 - 9) + 9 = y^2 \geq 0$.

21. Ta có: $4a(a+b)(a+1)(a+b+1) + b^2 = 4[a(a+b+1)][(a+b)(a+1)] + b^2$

$= 4(a^2 + ab + a)(a^2 + ab + a + b) + b^2$

Đặt $a^2 + ab + a = m$ rồi biến đổi biểu thức thành bình phương một đa thức.

22. a, b, c là 3 cạnh một tam giác gợi cho ta các bất đẳng thức $a + b > c; \ c + a > b; \ c + b > a$. Xét hiệu $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$, phân tích ra thừa số và sử dụng các bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

23. Xét hiệu $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 - (a^3 + b^3 + c^3)$

$= [a(b-c)^2 - a^3] + [b(c-a)^2 - b^3] + [c(a+b)^2 - c^3]$

Rồi phân tích ra thừa số.

24. a) Từ $a+b+c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ với $a, \ b, \ c > 0$, ta có $abc(a+b+c) > bc + ac + ab$.

Do $abc = 1$ nên $a + b + c > bc + ac + ab$ (1)

Xét $(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1$

$= (a + b + c) - (ab + bc + ac) > 0$ do (1)

b) Tích $(a-1)(b-1)(c-1)$ dương nên số thừa số âm chẵn, tức là trong các số $(a-1); \ (b-1); \ (c-1)$ có một số dương hoặc ba số dương.

Trường hợp $(a-1); \ (b-1); \ (c-1)$ đều dương thì $a > 1; \ b > 1; \ c > 1$ nên $abc > 1$ (trái với giả thiết $abc = 1$).

Vậy trong các số $(a-1)$; $(b-1)$; $(c-1)$ chỉ có một số dương, còn hai số âm, tức là trong ba số a, b, c có một số lớn hơn 1, hai số nhỏ hơn 1.

25. Xét hiệu $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ vì $ab>0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

26. Xét $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

Theo bài trên, do $a,b,c>0$ nên $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$; $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$; $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$.

Do đó $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có $a=b$; $b=c$; $c=a$ hay $a=b=c$.

27. $x^2-2x+y^2+4y+5=(x-1)^2+(y+2)^2\geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-1=0\\y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 0 khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$.

28. Nhân hai vế của $\frac{x-y}{x+y}$ với $x+y\neq 0$.

29. ***Cách 1:*** Đặt $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=A$.

Để chứng minh $A<1$, ta sẽ xét một biểu thức trung gian, gọi là B, sao cho $A<B<1$ và biểu thức B có thể rút gọn dễ dàng.

Ta thấy $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}$; ...; $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$

Do đó $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$

Theo bài trên, vế phải của bất đẳng thức trên bằng $\frac{n-1}{n}<1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Chọn biểu thức trung gian là

$B=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}$ thì $A<B$

Còn $B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(n-1)(n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$. Vậy $A<B<\frac{3}{4}<1$.

30. Nếu chọn biểu thức trung gian là $B=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}$

thì rút gọn biểu thức trung gian rất khó.

Cách 1: Chọn biểu thức trung gian là: $B=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+...+\frac{1}{(2n)^2-1}$

Đặt $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}$. Dễ thấy $A<B$

Còn $B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy $A<\frac{n}{2n+1}<\frac{n}{2n}<\frac{1}{2}$.

Cách 2:

$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2.2^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+...+\frac{1}{2^2.n^2}$

$=\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)$

Theo bài trên thì $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1$, do đó $A<\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}$.

31. Viết mẫu số của phân thức dưới dạng

$4x^2-4x+5=4x^2-4x+1+4=(2x-1)^2+4$

Bình phương một số thì không âm nên $(2x-1)^2\geq 0$ (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$)

Cộng 4 vào hai vế, ta được $(2x-1)^2+4\geq 4$.

Theo quy tắc so sánh hai phân số cùng tử số mà tử số và mẫu số đều dương, ta có: $\frac{3}{(2x-1)^2+4} \le \frac{3}{4}$. Phân thức đã cho có giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Chú ý: *không nên máy móc áp dụng quy tắc so sánh phân số cho phân thức đại số để nói rằng phân thức đã cho có tử số không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu số nhỏ nhất. Lập luận như trên có thể dẫn đến sai lầm. Ví dụ áp dụng lập luận phân thức có giá trị lớn nhất khi* x^2-3 *nhỏ nhất, tức là khi* $x=0$, *suy ra giá trị lớn nhất của* $\frac{1}{x^2-3}$ *bằng* $-\frac{1}{3}$ *(1)*

Dễ thấy $-\frac{1}{3}$ *không phải là giá trị lớn nhất của* $\frac{1}{x^2-3}$. *Chẳng hạn với* $x=2$ *thì giá trị của* $\frac{1}{x^2-3}$ *bằng 1, lớn hơn* $-\frac{1}{3}$.

Như vậy, từ $-3<1$ *không thể suy ra* $-\frac{1}{3} > \frac{1}{1}$. *Từ* $a<b$ *chỉ suy ra được* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ *khi a và b là hai số cùng dấu.*

32. Viết biểu thức đã cho dưới dạng: $\frac{1}{2x-x^2-4} = -\frac{1}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{(x-1)^2+3}$

Do $(x-1)^2 \ge 0$ nên $(x-1)^2+3 \ge 3$. Dựa vào quy tắc so sánh hai phân số cùng tử số mà tử số và mẫu số đều dương (hoặc nghịch đảo và đổi chiều bất đẳng thức có hai vế cùng dấu), ta có: $\frac{1}{(x-1)^2+3} \le \frac{1}{3}$.

Nhân hai vế của bất đẳng thức với -1 và đổi chiều: $-\frac{1}{(x-1)^2+3} \ge -\frac{1}{3}$.

Vậy biểu thức đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x=1$.

33. Viết biểu thức đã cho thành:

$$\frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3} = \frac{3(x^2+2x+3)+1}{x^2+2x+3} = 3+\frac{1}{x^2+2x+3} = 3+\frac{1}{(x+1)^2+2}$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng $\frac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x=-1$.

34. Viết biểu thức đã cho dưới dạng:

$$P=\frac{4x^2-2x+1}{x^2}=\frac{3x^2+x^2-2x+1}{x^2}=3+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\geq 3$$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 khi và chỉ khi $x=1$.

35. $Q=\dfrac{2x+1}{x^2+2}=\dfrac{x^2+2-x^2+2x-1}{x^2+2}=1-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2}\leq 1$

Giá trị lớn nhất của Q bằng 1 khi và chỉ khi $x=1$.

36. Để tìm giá trị nhỏ nhất, ta viết $\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ dưới dạng:

$$\frac{4x+3}{x^2+1}=\frac{x^2+4x+4-x^2-1}{x^2+1}=\frac{(x+2)^2}{x^2+1}-1\geq -1$$

Để tìm giá trị lớn nhất, ta viết $\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ dưới dạng:

$$\frac{4x+3}{x^2+1}=\frac{4x^2+4-4x^2+4x-1}{x^2+1}=\frac{4(x^2+1)-(4x^2-4x+1)}{x^2+1}=4-\frac{(2x-1)^2}{x^2+1}\leq 4$$

37. Rút gọn biểu thức đã cho thành $\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 0 khi và chỉ khi $x=-2$.

38. a) Cho $a,b>0$ có $ab=k$ (k là hằng số). Ta sẽ chứng minh $a+b$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=b$.

Ta có $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=(a-b)^2+4ab=(a-b)^2+4k\geq 4k$;

$(a-b)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=b$.

Vì $a+b>0$ nên $(a+b)^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $(a+b)$ nhỏ nhất. Do đó $(a+b)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=b$. Vậy hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số ấy bằng nhau.

b) Với $x>0$ thì $8x$ và $\dfrac{2}{x}$ là hai số dương. Tích của chúng bằng $8x.\dfrac{2}{x}=16$ (không đổi). Do đó tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $8x=\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (do $x>0$).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $8x+\dfrac{2}{x}$ bằng $8.\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=8$.

§9. Các bài toán tổng hợp

Ví dụ 1: Chứng minh rằng không thể có các số nguyên a, b, c, d nào thỏa mãn các đẳng thức: $abcd - a = 1961; abcd - b = 961; abcd - c = 61; abcd - d = 1$

(Đề thi vô địch toàn lớp 7 Mátxcơva, vòng II, 1961)

Giải

Gợi ý chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử có các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn các đẳng thức đã cho.

Phân tích vế trái của các đẳng thức đã cho thành nhân tử, ta có:

$a(bcd - 1) = 1961$ (1)

$b(acd - 1) = 961$ (2)

$c(abd - 1) = 61$ (3)

$d(abc - 1) = 1$ (4)

Vế phải của (1) là số lẻ, do đó vế trái của (1) phải là tích của hai số lẻ, suy ra a là số lẻ. Tương tự như vậy, từ (2), (3), (4), ta có b, c, d đều là số lẻ.

Bốn số a, b, c, d lẻ, nên tích abcd là số lẻ, và $abcd - a$ (hiệu của hai số lẻ) là một số chẵn, mâu thuẫn với đẳng thức (1) đã cho.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các nghiệm số của phương trình: $(x + 7)(2x + 1) = 0$

Trong các trường hợp sau:

a. Ẩn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp N các số tự nhiên;

b. Ẩn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp Z các số nguyên;

c. Ẩn x lấy giá trị trên tập hợp Q các số hữu tỉ.

Giải

$(x + 7)(2x + 1)$ là một tích của hai nhân tử, tích này bằng 0 khi và chỉ khi ít nhất một nhân tử bằng 0.

a. Với mọi $x \in N$ thì $x + 7 > 0$ và $2x + 1 > 0$. Tích của hai số dương không thể bằng 0, vậy phương trình đã cho là vô nghiệm trên tập hợp N.

b. Với $x \in Z$ thì: $x + 7 = 0$ có nghiệm $x = -7$, $2x + 1 = 0$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là -7 trên tập hợp Z.

c. Với $x \in Q$ thì $x + 7 = 0$ có nghiệm là $x = -7$

$2x + 1 = 0$ có nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là -7 và $-\frac{1}{2}$ trên tập hợp Q.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu tích của ba số bằng 1 và tổng của chúng lớn hơn tổng các số nghịch đảo của chúng thì có một trong ba số đó lớn hơn 1.

(Đề thi vô địch Nam Tư, 1976)

Giải

Gọi a, b, c là các số đó ta có: $abc = 1$; $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Hãy xét tích: $(a-1)(b-1)(c-1)$. Khai triển và sử dụng các giả thiết, ta đưa về: $(a-1)(b-1)(c-1)=(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>0$

Tức là $(a-1)(b-1)(c-1)>0$. Không thể có trường hợp cả ba số $a-1, b-1, c-1$ đều dương mà chỉ có một trong ba số đó dương (hai số kia âm).

Ví dụ 4: Cho đa thức: $P(x)=ax^2+bx+c$. Chứng minh rằng nếu P(x) có ba nghiệm số phân biệt α, β, γ thì $a=b=c=0$ tức là P(x) = 0 với mọi x.

Giải

Theo giả thiết:

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ (1); $a\beta^2+b\beta+c=0$ (2); $a\gamma^2+b\gamma+c=0$ (3)

Từ (1) và (2), trừ vế với vế hai đẳng thức, ta được:

$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)[a(\alpha+\beta)+b]=0$

Mà $\alpha-\beta\neq 0$ (theo giả thiết) do đó: $a(\alpha+\beta)+b=0$ (4)

Tương tự như vậy, từ (1) và (3) ta có: $a(\alpha+\gamma)+b=0$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $a(\alpha+\beta-\alpha-\gamma)=0 \Leftrightarrow a(\beta-\gamma)=0$

Mà $\beta-\gamma\neq 0$ (theo giả thiết), ta được: a = 0

Từ đó, suy ra dễ dàng b = c = 0.

P(x) có tất cả các hệ số bằng 0, nên P(x) = 0 với mọi x.

Ví dụ 5: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức

$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008$ cho đa thức $x^2+10x+21$

Giải

Ta có: $P(x)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2008$

Đặt $t=x^2+10x+21$ $(t\neq -3; t\neq -7)$, khi đó ta có :

$P(t)=(t-5)(t+3)+2008=t^2-2t+1993$

Do đó khi chia $t^2-2t+1993$ cho t ta có số dư là 1993

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương:

a) $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

b) $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ chia hết cho 3^n.

Giải

a) Ta cần viết tích $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ thành một tích trong đó có n thừa số 2. Viết tích trên thành:

$\frac{1.2.3...(2n)}{1.2.3...n}=\left[1.3.5...(2n-1)\right].\frac{2.4.6...(2n)}{1.2.3...n}$

Biểu thức $\frac{2.4.6...(2n)}{1.2.3...n}$ rút gọn thành $\frac{[1.2.3...n].2^n}{1.2.3...n}=2^n$.

Như vậy $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Chú ý: Còn có thể nói rằng tích tên chứa đúng n thừa số 2 vì biểu thức trong dấu móc là tích của các số lẻ nên không chứa thừa số 2 nào.

b) Viết tích $(n+1)(n+2)(n+3)...(3n)$ dưới dạng:

$$\frac{1.2.3...(3n)}{1.2.3...n} = \left[1.4.7...(3n+1)\right].\left[2.5.8...(3n+2)\right].\frac{3.6.9...(3n)}{1.2.3...n}$$

Ví dụ 7. Cho $3a^2 + 3b^2 = 10ab$ và $b > a > 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$.

Giải:

Cần biến đổi biểu thức P để sử dụng được điều kiện $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Do đó ta xét biểu thức

$$P^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab} = \frac{3a^2+3b^2-6ab}{3a^2+3b^2+6ab}$$

$$= \frac{10ab-6ab}{10ab+6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}.$$

Do $b > a > 0$ nên $a - b < 0$; $a + b > 0 \Rightarrow P < 0$.

Vậy: $P = -\frac{1}{2}$.

§10. Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên

Trong chuyên đề trước chúng ta đã đề cập đến một số phương trình nghiệm nguyên đặc biệt. Trong chuyên đề này chúng ta sẽ nêu ra một số phương pháp thông dụng để giải các phương trình nghiệm nguyên.

1. *Phương trình sử dụng bất đẳng thức*

Trong khi giải các phương trình nghiệm nguyên rất cần đánh giá miền giá trị của các biến, nếu số giá trị mà biến số có thể nhận không nhiều thì có thể sử dụng phương pháp thử trực tiếp để kiểm tra. Để đánh giá được miền giá trị của biến số cần vận dụng linh hoạt các tính chất chia hết, đồng dư, bất đẳng thức...

Ví dụ 1: Giải phương trình sau trên tập số nguyên:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$$

Giải:

Viết phương trình đã cho dưới dạng: $(x-3y)^2 = 4(25-y^2)$ (1)

Từ (1) ta suy ra $y^2 \le 25$ và $25 - y^2$ là số chính phương. Do đó:

$y^2 \in \{0, 9, 16, 25\}$ hay $y \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$

Từ đó ta có các nghiệm:

(10, 0); (–10, 0); (17, 3); (1, 3); (–17, –3)

(–1, –3); (6, 4); (18, 4); (–18, –4); (–6, –4); (15, 5); (–15, –5)

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}=3$.

Giải

Điều kiện: $x, y, z \neq 0$. Từ phương trình đã cho ta có:

$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=3xyz$. Suy ra $xyz>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4}$

Từ đó ta có $3xyz \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4}$ hay $xyz \leq 1$. Do $xyz>0$ nên $xyz=1$.

Từ đó ta có các nghiệm

(1; 1; 1); (1; –1; –1); (–1; –1; 1); (–1; 1; –1)

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2=1+x+x^2+x^3+x^4$

Giải:

Với $x=0$ thì $y=\pm 1$. Xét $x \neq 0$. Từ phương trình đã cho ra có:

$$4y^2=(2x^2+x)^2+3x^2+4x+4>(2x^2+x)^2$$

Hơn nữa: $4y^2=(2x^2+x+2)^2-5x^2<(2x^2+x+2)^2$

Suy ra: $(2x^2+x)^2<4y^2<(2x^2+x+2)^2$. Do đó ta có:

$4y^2=(2x^2+x+1)^2$ hay $4(1+x+x^2+x^3+x^4)=(2x^2+x+1)^2$

Giải phương trình này, ta được $x=-1$ hoặc $x=3$.

Từ đó ta được các nghiệm của phương trình là:

$(0,1)$; $(0,-1)$; $(-1;1)$; $(-1,-1)$; $(3,11)$; $(3,-11)$

Ví dụ 4: Giải phương trình sau trong tập các số nguyên

$$1+x+x^2+x^3=y^3 \qquad (1)$$

Giải:

Từ phương trình đã cho ta có: $x^3<y^3<(x+2)^3$

Suy ra $y^3=(x+1)^3$ hay $1+x+x^2+x^3=(x+1)^3$

Từ đó ta có $x=0$ hay $x=-1$. Thay vào (1), ta được các nghiệm của phương trình (1) là $(0,1)$; $(-1,0)$.

Ví dụ 5: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$5(x+y+z+t)+10=2xyzt$$

Giải:

Vì vai trò của x, y, z, t như nhau nên ta có giả thiết: $x \geq y \geq z \geq t>0$

Khi đó: $2xyzt=5(x+y+z+t)+10 \leq 20x+10$

$\Rightarrow yzt \leq 15 \Rightarrow t^3 \leq 15 \Rightarrow t \leq 2$

Với $t = 1$ ta có $2xyz = 5(x + y + z) + 15 \le 15x + 15$

$\Rightarrow 2yz \le 30 \Rightarrow 2z^2 \le 30 \Rightarrow z \le 3$

Nếu $z = 1$ thì $2xy = 5(x + y) + 20$ hay $4xy = 10(x + y) + 40$ hay

$$(2x - 5)(2y - 5) = 65$$

Dễ thấy rằng phương trình này có nghiệm là: (35, 3); (9, 5)

Giải tương tự cho các trường hợp còn lại và trường hợp $t = 2$. Cuối cùng ta tìm được nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là:

$(x;y;z;t) = (35;3;1;1)$; $(9;5;1;1)$ và các hoán vị của bộ số này.

2. Phương pháp đưa về phương trình tích

Trong khi giải phương trình nghiệm nguyên, một phương pháp thường được sử dụng là đưa phương trình đã cho về dạng phương trình tích như sau:

$$f(x_1, x_2, ...x_n).g(x_1, x_2, ...x_n)...h(x_1, x_2, ...x_n) = a$$

Trong đó $f(x_1, x_2, ...x_n)$, $g(x_1, x_2, ...x_n)$, $h(x_1, x_2, ...x_n)$ *là các biểu thức chứa biến và a là hằng số.*

Ví dụ 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x + xy + y = 9$

(Thi vào lớp 10 chuyên ĐHKHTN- ĐHQGHN năm 2002)

Giải:

Phương trình đã cho có thể đưa về dạng: $(x + 1)(y + 1) = 10$ (1)

Từ (1) ta suy ra $(x + 1)$ là ước của 10 hay $x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là:

$(1, 4)$; $(4, 1)$; $(-3, -6)$; $(-6, -3)$; $(0, 9)$; $(9, 0)$; $(-2, -11)$; $(-11, -2)$

Ví dụ 7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $y^2 = x(x + 1)(x + 7)(x + 8)$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương với: $y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7)$

Đặt $z = x^2 + 8x$ ta có $y^2 = z^2 + 7z$ hay $4y^2 = (2z + 7)^2 - 49$ hay

$(2z - 2y + 7)(2z + 2y + 7) = 49$. Chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2z - 2y + 7 = 1 \\ 2z + 2y + 7 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ z = 9 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2z - 2y + 7 = 49 \\ 2z + 2y + 7 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -12 \\ z = 9 \end{cases}$

Trong cả hai trường hợp trên ta có: $z = 9 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -9 \end{array}\right.$

Trường hợp 3: $\begin{cases} 2z - 2y + 7 = -1 \\ 2z + 2y + 7 = -49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -12 \\ z = -16 \end{cases}$

Trường hợp 4: $\begin{cases} 2z - 2y + 7 = -49 \\ 2z + 2y + 7 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ z = -16 \end{cases}$

Trong cả hai trường hợp trên ta có:

$$z = -16 \Leftrightarrow x^2 + 8x = -16 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

Trường hợp 5: $2z - 2y + 7 = 2z + 2y + 7 = 7 \Leftrightarrow y = z = 0$

Khi đó ta có $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right.$

Trường hợp 6: $2z - 2y + 7 = 2z + 2y + 7 = -7 \Leftrightarrow y = 0$ và $z = -7$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm nguyên (x, y) sau:

$(1;12)$; $(-9;12)$; $(1;-12)$; $(-9;-12)$; $(0;0)$; $(-8;0)$

$(-1;0)$; $(-7;0)$; $(-4;12)$; $(-4;-12)$.

Ví dụ 8: Xác định tất cả các cặp số nguyên dương $(x;n)$ thỏa mãn phương trình sau: $x^3 + 3367 = 2^n$

Giải:

Để sử dụng được hằng đẳng thức $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ta chứng minh n chia hết cho 3. Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^3 \equiv 2^n \pmod 7$. Nếu n không chia hết cho 3 thì 2^n chia cho 7 chỉ có thể có số dư là 2 hoặc 4, trong đó x^3 khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0, 1 hoặc 6 nên không thể có đồng dư thức $x^3 \equiv 2^n \pmod 7$.

Vậy $n = 3m$ với m là một số nguyên dương nào đó. Thay vào phương trình đã cho ta được: $x^3 + 3367 = (2^m)^3$

$(2^m - x)((2^m - x)^2 + 3x.2^m) = 3367$ (1)

Từ (1) ta suy ra $2^m - x$ là ước của 3367.

Hơn nữa, $(2^m - x)^3 < 2^{3m} - x^3 = 3367$ nên $2^m - x \in \{1;7;13\}$

Xét $2^m - x = 1$, thay vào (1) ta suy ra $2^m(2^m - 1) = 2 \times 561$, vô nghiệm.

Xét $2^m - x = 13$, thay vào (1) ta được $2^m(2^m - 13) = 2 \times 15$, vô nghiệm.

Xét $2^m - x = 7$, thay vào (1) ta được $2^m(2^m - 7) = 2^4 \times 3^2$.

Từ đó ta có $m = 4$, $n = 3m = 12$ và $x = 9$.

Vậy $(x;n) = (9;12)$.

3. Phương pháp sử dụng tính chất chia hết, tính chất đồng dư

Ngoài các phương pháp trên, khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn, lẻ... để tìm ra điểm đặc biệt của các biến số cũng như các biểu thức chứa trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn.

Ví dụ 9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $19x^2 + 28y^2 = 729$

Giải:

Cách 1: Viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$(18x^2 + 27y^2) + (x^2 + y^2) = 729 \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $x^2 + y^2$ chia hết cho 3, do đó x và y đều chia hết cho 3. Đặt $x = 3u;\ y = 3v\ (u,v \in \mathbb{Z})$

Thay vào phương trình đã cho ta được: $19u^2 + 28v^2 = 81$ (2)

Từ (2), lập luận tương tự như trên ta suy ra $u = 3s,\ v = 3t\ (s,t \in \mathbb{Z})$

Thay vào (2) ta có $19s^2 + 28t^2 = 9$ (3). Từ (3) suy ra s, t không đồng thời bằng 0, do đó: $19s^2 + 28t^2 \geq 19 > 9$

Vậy (3) vô nghiệm và do đó phương trình đã cho cũng vô nghiệm

Cách 2: Giả sử phương trình có nghiệm.

Từ phương trình đã cho ta suy ra $x^2 \equiv -1 \pmod 4$, điều này không xảy ra với mọi số nguyên x.

Ví dụ 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Giải:

Viết phương trình đã cho dưới dạng: $(x^3)^2 + (x^3 - y)^2 = 320$

Đặt $u = x^3,\ v = x^3 - y$ ta có phương trình: $u^2 + v^2 = 320$ (1)

Từ (1) suy ra u, v cùng tính chẵn lẻ. Nếu u, v cùng lẻ thì $u^2 + v^2 \equiv 2 \pmod 4$, do đó đẳng thức (1) không xảy ra.

Vậy u, v cùng chẵn. Đặt $u = 2u_1,\ v = 2v_1\ (u_1, v_1 \in \mathbb{Z})$.

$$u_1^2 + v_1^2 = 80 \qquad (2)$$

Từ (2) lại lập luận như trên ta suy ra u_1, v_1 cùng chẵn.

Đặt $u_1 = 2u_2,\ v_1 = 2v_2\ (u_2, v_2 \in \mathbb{Z})$. Thay vào (2) ta được phương trình: $u_2^2 + v_2^2 = 20$ (3). Từ (3) lại lập luận như trên ta suy ra u_2, v_2 cùng chẵn. Đặt $u_2 = 2u_3,\ v_2 = 2v_3\ (u_3, v_3 \in \mathbb{Z})$.

Thay vào (3) ta có phương trình: $u_3^2 + v_3^2 = 5$ (4)

Từ (4) với lưu ý rằng u là lập phương của một số nguyên nên u_3 cũng là lập phương của một số nguyên, ta được các cặp (u_3, v_3) là:

$(1;2);\ (-1;2);\ (1;-2);\ (-1;-2)$

Từ đó ta có các nghiệm $(x;y)$ của phương trình đã cho là:

$(2;-8);\ (2;24);\ (-2;-24);\ (-2;8)$

Bài tập vận dụng

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $y(x-1)=x^2+2$

(Thi vào lớp 10 chuyên, ĐHKHTN- ĐHQGHN, năm 2000)

2. Tìm $x,y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2x^2-2xy=5x-y-19$

3. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy-243y+x=0$

(Trích đề thi học sinh giỏi Toán toàn quốc- Lớp 9, năm 1976)

4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $xyz=4(x+y+z)$

b) $5(x+y+z+t)+7=xyzt$

c) $2(x+y+z)+7=3xyz$

5. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn: $x+y=xy$

6. Tìm tất cả các giá trị của x, y sao cho: $xy+1=x+y$.

(Đề thi vô địch toán 7 Matxcova, 1985)

7. Tìm các số thực u,v biết : $u^3+v^3=7$ và $u.v=-2$.

8. Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2-xy=6x-5y-8$ (1)

9. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy-2x-3y+1=0$.

Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm 2003-2004

10. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $xy+yz+zx=xyz+2$.

11. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

12. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{xy}$.

13. Giải phương trình nghiệm nguyên $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.

Đề thi TS lớp 10 CT THPT Lam Sơn Thanh Hóa 2001-2002

14. Tìm các số tự nhiên : $2<x<y<z<t<u$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=1.$$

15. Tìm các số tự nhiên m, n thỏa mãn: $19m+84n=1984$.

16. Tìm tất cả các số có hai chữ số mà nó chia hết cho tích các chữ số.

17. Tìm tất cả các số có năm chữ số sao cho số đó bằng 45 lần tích các chữ số của nó.

18. Giải phương trình nghiệm nguyên

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$.

19. Giải phương trình nghiệm nguyên $x(1+x+x^2)=4y(y+1)$.

20. Chứng minh rằng không thể có các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $x^3-y^3=1993$

21. Cho một số A gồm bốn chữ số và A là một số chính phương. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được một số B cũng là một số chính phương. Hãy tìm các số A và B.

22. Tìm cặp số tự nhiên x, y sao cho tổng của một trong hai số đó với 1 thì chia hết cho số kia.

23. Tìm các số nguyên x, y thỏa phương trình $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

24. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

25. Tìm số nguyên có chín chữ số $A = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ trong đó $a_1 \neq 0$ và $\overline{b_1b_2b_3} = 2\overline{a_1a_2a_3}$, đồng thời A có thể viết được dưới dạng $A = p_1^2.p_2^2.p_3^2.p_4^2$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố khác nhau.

26. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $n + 26$ và $n - 11$ đều là lập phương của một số nguyên dương.

Hướng dẫn và đáp số

1. Ta có: $y(x-1) = x^2 + 2 \Rightarrow y = \dfrac{x^2+2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{3}{x-1}$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1$ là ước của 3.

Đáp số: $(x;y) = (4;6)$; $(2;6)$; $(-2;-2)$; $(0;-2)$

2. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$

Đáp số: $(x;y) = (0;-19)$, $(1;\ 16)$, $(9;8)$,$(-8,\ -11)$

3. Ta có $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0 \Leftrightarrow x(y+1)^2 = 243y$ (1)

Từ (1) với chú ý rằng $(y+1;y) = 1$ ta suy ra $(y+1)^2$ là ước của 243.

Đáp số: $(x;y) = (54;\ 2)$, $(24;\ 8)$

4. a) Vì vai trò của x, y, z là như nhau nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó,

$xyz = 4(x+y+z) \leq 12x \Rightarrow yz \leq 12$

$\Rightarrow z^2 \leq 12 \Rightarrow z^2 \in \{1;\ 4;\ 9\} \Rightarrow z \in \{1,\ 2,\ 3\}$

Với mỗi z thuộc tập hợp trên, thay vào phương trình ban đầu và đưa phương trình về dạng tích, từ đó tìm được x, y.

Ví dụ trường hợp $z = 1$. Ta có:

$xy = 4(x+y+1) \Leftrightarrow (x-4)(y-4) = 20$

Cho $x - 4$ và $y - 4$ là các ước của 20 với $x - 4 \geq y - 4 \geq -3$ (do $x \geq y \geq z = 1$), ta được các cặp $(x;y)$ là $(24;5)$; $(14;6)$; $(9;8)$

Chú ý: Trong khi xét các trường hợp của z, cần lưu ý các điều kiện của x, y để loại bớt các khả năng.

Đáp số: Phương trình đã cho có các nghiệm là: $(24;5;1)$; $(14;6;1)$; $(9;8;1)$; $(10;3;2)$; $(6;4;2)$ và hoán vị của các bộ số này.

5. $x + y = xy \Leftrightarrow x + y + 1 = xy + 1$

$\Leftrightarrow -x - y + 1 + xy = 1 \Leftrightarrow (xy - x) - (y - 1) = 1$

$\Leftrightarrow x(y-1) - (y-1) = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 1\,(1)$. Vì x, y $\in$ Z nên $x - 1 \in Z$

và $y - 1 \in Z$. Trong Z, ta có (1) khi và chỉ khi: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow(x=2;y=2)\\ \begin{cases}x-1=-1\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow(x=0\ y=0)\end{array}\right.$

6. $xy + 1 - x - y = 0 \Leftrightarrow (xy - x) + (1 - y) = 0$

$\Leftrightarrow x(y-1) + (1-y) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\y=1\end{array}\right.$

Đáp số: x = 1, y tùy ý , hoặc y = 1, x tùy ý.

7. Ta có : $u^3 + v^3 = 7$ (1) và $u^3.v^3 = -8$ (2)

Từ $u^3 + v^3 = 7 \Rightarrow u^3 = 7 - v^3$, thế vào (2) ta có :

$(7 - v^3).v^3 = -8 \Leftrightarrow 7v^3 - v^6 + 8 = 0$. Đặt $v^3 = x$ ta có phương trình:

$x^2 - 7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 7x\text{-}7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) - 7(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=8\end{array}\right.$

Do đó : $(u^3 = -1; v^3 = 8)$ hoặc $(u^3 = 8; v^3 = -1)$

Vậy: $(u = -1;\ v = 2)$ hoặc $(u = 2;\ v = -1)$.

8. Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x-5)\,(2) \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$ (vì $x = 5$ không là nghiệm của (2)) $\Leftrightarrow y = x - 1 + \dfrac{3}{x-5}$

Vì x, y nguyên $x - 5 \in \{-1;\ 1;\ 3;\ -3\}$ hay $x \in \{4;\ 6;\ 8;\ 2\}$

- Khi $x = 2$ thì $y = 0$
- Khi $x = 4$ thì $y = 0$
- Khi $x = 6$ thì $y = 8$
- Khi $x = 8$ thì $y = 8$

Vậy các nghiệm nguyên (x; y) của (1) là: (2; 0), (4; 0), (6; 8), (8; 8).

9. Ta có $xy - 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y(x - 3) = 2x - 1$ (*)

Vì x = 3 không là nghiệm của phương trình đã cho nên

$(*) \Leftrightarrow y = \dfrac{2x-1}{x-3} = 2 + \dfrac{5}{x-3}$

Vì y là số nguyên nên 5 chia hết cho (x − 3), suy ra x − 3 nhận các giá trị ± 1; ± 5. Từ đó ta xác định được hai nghiệm nguyên dương (x;y) của phương trình đã cho là (4; 7) và (8; 3).

10. Do vai trò của x, y, z bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \ge y \ge z \ge 1$, từ đó

$\Rightarrow xy + yz + zx \le xy + xy + xy = 3xy \Rightarrow 3xy \ge xyz + 2$ hay

$3xy > xyz \Rightarrow z < 3$ do z là một số nguyên dương $\Rightarrow z = 1, z = 2$.

- Khi z = 1, ta có $xy + y + x = xy + 2 \Rightarrow x + y = 2$.

Do x, y là các số nguyên dương nên x = 1; y = 1.

- Khi z = 2 ta có $xy + 2y + 2x = 2xy + 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 2 = 0$.

$\Rightarrow x(y-2) - 2(y-2) - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(y-2) = 2$. Do $x \ge y \ge z \ge 1$, nên

$$\begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = y = z = 1 ; (x; y; z) = (4 ; 3 ; 2).

11. Ta có $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3y}{y+3} = 3 - \frac{9}{y+3}$, do x, y nguyên dương nên x nguyên dương khi và chỉ khi 9 chia hết cho y + 3, hay y + 3 nhận các ước của 9 là $\pm 1; \pm 3; \pm 9$ từ đó suy ra phương trình có nghiệm x = 2, y = 6.

12. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \ge y$. Khi đó, từ phương trình

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{xy}$ suy ra $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} \le \frac{2}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{2x-1}{xy} < \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y}$

Từ đó suy ra y < 6. Thử trực tiếp các giá trị y = 1, 2, 3, 4, 5 và do vai trò của x, y bình đẳng nên các cặp số cần tìm là :

$(x; y) = (9; 4), (6; 5), (4; 9), (5; 6)$.

13. Ta có $n + 26 = a^3$ và $n - 11 = b^3$ với

$a > b \in N^* \Rightarrow a^3 - b^3 = 37 \Leftrightarrow (a^2 + ab + b^2)(a - b) = 37$.

Ta có số 37 là số nguyên tố và do $a > b \in N^*$ nên $(a^2 + ab + b^2) > (a - b)$ và là các số tự nhiên

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 37 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 12 = 0 \\ a - 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow a = 4$ và $b = 3$ (còn $a = -3$ và $b = -4$ bị loại). Thay vào đẳng thức $n + 26 = a^3$ hoặc $n - 11 = b^3$ ta có n = 38.

14. Nếu x > 3 ta có 3 < x < y < z < t < u, từ phương trình đã cho suy ra

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{743}{840} < 1$. Vậy x = 3.

Từ đó suy ra $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} = \frac{2}{3}$. Nếu y > 4, lập luận tương tự, ta có:

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{533}{840}<\frac{2}{3}$, suy ra y = 4. Tiếp tục lập luận như trên ta có các số tự nhiên cần tìm là x = 3, y = 4, z = 5, t = 6, u = 20.

15. Ta có $1984 = 1900 + 84$, nên dễ thấy cặp giá trị m = 100, n = 1 thỏa mãn. Từ đó ta suy ra dạng tổng quát của m, n như sau

$m = 100 - p;\ \ n = 1 + q \Rightarrow 19p = 84q$, vì $(84,19) = 1$ suy ra

$p = 84k; q = 19k,\ (k \in Z)$.

Do đó ta có $m = 100 - 84k; n = 1 + 19k, (k \in Z)$

Từ đó suy ra m và n là số tự nhiên khi và chỉ khi k = 0, k = 1.

Khi k = 0 thì m = 100, n = 1. Khi k = 1 thì m = 16, n = 20.

16. Gọi số cần tìm là $\overline{xy}(x \in N, y \in N, 1 \le x \le 9, 0 \le y \le 9)$, theo đề ra ta có 10x + y chia hết cho xy, suy ra y chia hết cho x và 10x chia hết cho y. Do đó đặt y = kx, nên 10x chia hết cho kx suy ra 10 chia hết cho k.

Vậy k = 1, 2, 5. Khi k = 1 ta có x = y, suy ra $\overline{xy} = 11$.

Khi k = 2 ta có x = 2y, suy ra $\overline{xy} = 12; 24; 36$.

Khi k = 5 ta có x = 5y, suy ra $\overline{xy} = 15$.

Vậy các số cần tìm là 11, 12, 15, 24, 36.

17. Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ $(a, b, c, d, e \in N, 1 \le a \le 9, 0 \le b, c, d, e \le 9)$, ta có $M = \overline{abcde} = 45.a.b.c.d.e$. Giả sử e là số chẵn, mà $\overline{abcde}$ chia hết cho 5 nên e = 0, suy ra M = 0 (vô lí). Từ đó suy ra e là số lẻ, nên e = 5. Do đó M chia hết cho 25, suy ra $\overline{de}$ chia hết cho $25 \Rightarrow d = 2; 7$. Nếu d chẵn, suy ra vô lí. Vậy d = 7. Mặt khác M chia hết cho 9 nên (a + b + c +12) chia hết cho 9. Vì a + b + c $\le 27 \Rightarrow a + b + c = 15$.

Đồng thời $45.35abc < 100000 \Rightarrow abc \le 63 \Rightarrow \{a, b, c\} = \{1, 7, 7\}$ hay $\{1, 5, 9\}$.

Từ đó suy ra số cần tìm là 77175.

18. Từ phương trình đã cho, ta có x, y cùng tính chẵn lẻ. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Khi x = y, phương trình đã cho trở thành

$4x^3 = 8(3x^2 + 1) \Leftrightarrow 4x^3 = 24x^2 + 8 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 - 2 = 0$, suy ra phương trình này vô nghiệm.

Trường hợp 2: Khi $x \ne y$, ta có

$|x - y| \ge 2 \Rightarrow (x - y)^2 \ge 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 2(xy + 2)$.

Từ phương trình $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$, suy ra

$(x^2 + y^2)(x + y) = 8(x^2 + y^2) + 8xy + 8$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8xy + 8 \Rightarrow |x^2 + y^2||x + y - 8| = 4|2xy + 2|$

$\Rightarrow |x + y - 8| < 4 \Rightarrow 4 < x + y < 12 \Rightarrow x + y = 6, 8, 10$.

Xét từng trường hợp ta có nghiệm của phương trình đã cho là

$(x, y) = (2, 8); (8, 2)$.

19. Ta có $x(1 + x + x^2) = 4y(y + 1) \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4y + 1$

$\Leftrightarrow (1 + x)(1 + x^2) = (2y + 1)^2$ (2). Vế phải của phương trình (2) là một số lẻ suy ra $(1 + x); (1 + x^2)$ đều là số lẻ. Giả sử $(1 + x, 1 + x^2) = d$, suy ra d cũng là số lẻ. Mặt khác $(1 + x)$ chia hết cho d nên $1 - x^2$ chia hết cho d. Kết hợp với $1 + x^2$ chia hết cho d ta suy ra 2 chia hết cho d, mà d là số lẻ nên d = 1. Do $(1 + x).(1 + x^2)$ là số chính phương mà $(1 + x, 1 + x^2) = 1$, nên $(1 + x), (1 + x^2)$ là các số chính phương. Do đó $x^2; 1 + x^2$ là hai số tự nhiên liên tiếp mà đều là số chính phương. Suy ra $x = 0$, từ đó suy ra $y = 0$ hoặc $y = -1$. Vậy phương trình có hai nghiệm (0; 0), (0; –1).

20. $x^3 - y^3 = 1993 \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1993$

Do $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ nên $x - y$, $x^2 + xy + y^2$ là các ước số dương của 1993

Do 1993 là số nguyên tố, nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1993 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - y = 1993 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Các hệ phương trình trên không có nghiệm nguyên nên bài toán đã cho được chứng minh.

21. Gọi $A = \overline{abcd} = x^2$

Thì $B = \overline{(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)} = y^2$; $x, y \in N$ và $x < y$.

Ta có: $B - A = y^2 - x^2 = 1111$. Suy ra $(y - x)(x + y) = 1111$.

A và B là các số chỉ có 4 chữ số, nên x, y chỉ có thể có hai chữ số.

Ta viết: $1111 = 11.101$ Hoặc $1111 = 1.1111$

Vì $y + x > y - x$ nên ta có: $y + x = 101$ và $y - x = 11$

Từ đây suy ra x = 45, y = 56 nên A = 2025; B = 3136.

22. Giả sử các số đó là x, y với x > 1, y > 1 và không làm giảm tính tổng quát, ta có thể đặt $x \leq y$. Theo bài ra thì $(x + 1) \vdots y$ và $(y + 1) \vdots x$

Do vậy: $[(x + 1)(y + 1)] \vdots xy$; $(xy + x + y + 1) \vdots xy \Rightarrow (x + y + 1) \vdots xy$

Hay $x + y + 1 = p.xy$ với $p \in N$. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = p$. Vì $x \geq 1$ và $y \geq 1$ nên rõ ràng là: $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq 1 + 1 + 1 = 3$.

Vậy p chỉ có thể nhận một trong các giá trị 1, 2, 3.

a. Với p = 3: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=3 \Rightarrow$ cặp số (1, 1)

b. Với p = 2: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

c. Với p = 1: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1 \Rightarrow$ cặp (2, 3)

Tóm lại có 3 cặp số thỏa mãn yêu cầu: $(1;1);(2;3);(3;2)$.

23. $x^2+xy+y^2=x^2y^2 \Rightarrow (2x+2y)^2=(2xy+1)^2-1$

$\Rightarrow (2xy+1+2x+2y)(2xy+1-2x-2y)=1$

$\Rightarrow 2xy+1+2x+2y=2xy+1-2x-2y \Rightarrow x+y=0$. Thay vào phương trình ban đầu ta có: $x=0,\ y=0$ hoặc $x=1,\ y=-1$ hoặc $x=-1,\ y=1$

24. Giả sử n^4+n^3+1 là số chính phương. Vì $n^4+n^3+1>n^4=(n^2)^2$ nên ta có: $n^4+n^3+1=(n^2+k)^2=n^4+2kn^2+k^2$, với k là một số nguyên dương nào đó. Suy ra: $n^2(n-2k)=k^2-1\ge 0$. Đặc biệt, $k^2-1=0$ thì $k=1;\ n^2(n-2)=0$, ta có $n=2$. Thử lại, $2^4+2^3+1=5^2$: thỏa mãn. Ngoài ra, khi $k\ne 1$ thì: $k^2>k^2-1\ge n^2 \Rightarrow k>n \Rightarrow n-2k<0$: mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n-2k)=k^2-1\ge 0$.

Vậy, ta chỉ tìm được $n=2$ thỏa mãn bài toán.

25. $A=\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}=\overline{a_1a_2a_3}.10^6+\overline{b_1b_2b_3}.10^3+\overline{a_1a_2a_3}$

$=\overline{a_1a_2a_3}.10^6+2.\overline{a_1a_2a_3}.10^3+\overline{a_1a_2a_3}=\overline{a_1a_2a_3}.(10^6+2+1)$

$=\overline{a_1a_2a_3}(1002001)=\overline{a_1a_2a_3}.7^2.11^2.13^2$

Vậy $\overline{a_1a_2a_3}$ phải bằng bình phương của một số nguyên tố p khác với 7, 11, 13. Do $\overline{b_1b_2b_3}<1000$ nên $\overline{a_1a_2a_3}<500 \Rightarrow 10<p<23$. Như vậy, p chỉ có thể là 17 hoặc 19, do đó: $\overline{a_1a_2a_3}=289$ hoặc $\overline{a_1a_2a_3}=361$.

Một số bài tập tự giải

1. Viết kết quả của các số 2^{1982} và 5^{1982}, số nọ tiếp theo số kia. Hỏi số tạo thành có bao nhiêu chữ số?
2. Tìm ba số tự nhiên có tổng các số nghịch đảo bằng 2.
3. Tìm ba số tự nhiên có tổng các nghịch đảo bằng 1.
4. Cho $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$. Chứng minh $a=b=c$.
5. Gọi h_a, h_b, h_c là ba đường cao một tam giác và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ấy. Chứng minh rằng nếu $h_a+h_b+h_c=9r$ thì tam giác đó là tam giác đều.

****